Spirala logaritmică

Vom prezenta în acest tutorial spirala logaritmică, o curbă cu proprietăţi remarcabile, care apare în mod natural în analiza complexă, fiind soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare

$$z'(t) = \lambda z(t).$$

Aici vrem să evidenţiem proprietăţile geometrice ale acestei curbe[1], insistând asupra faptului că puterile q^n, cu $n \in \mathbb{Z}$, ale oricărui număr complex $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu $|q| \neq 1$, sunt situate pe o spirală logaritmică. Dacă $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ are modulul 1, puterile lui sunt pe cercul unitate, după cum bine ştim, iar dacă q este număr real, puterile lui sunt pe axa reală, desigur.

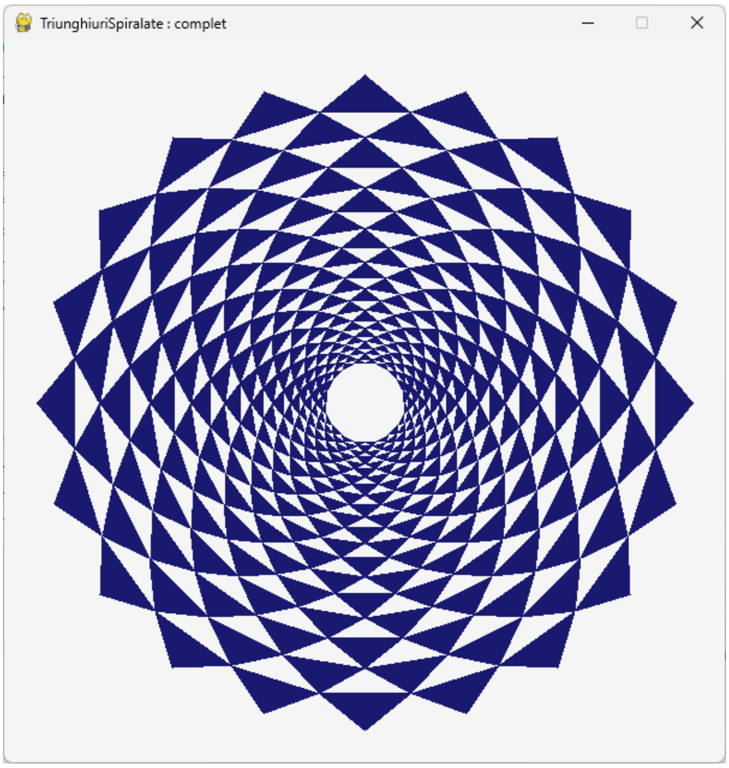

Figura 1: Progresii geometrice

De exemplu, triunghiurile din Figura 1, desenate de programul următor, au vârfurile în punctele

$$z_{n,m} = \omega^n q^m, \;\; n, m = 0, \dots, N,$$

[1]vezi `https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/logarithmic/logarithmic.shtml`

cu $N = 20$ şi

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}, \quad q = 0.9 \cdot (\cos\frac{\pi}{N} + i\sin\frac{\pi}{N}).$$

```
import ComplexPygame as C
import Color
import math, cmath

def TriunghiuriSpiralate():
    r = 1.1
    C.setXminXmaxYminYmax(-r, r, -r, r)
    N = 20
    alfa = math.pi / N
    w = C.fromRhoTheta(1, 2 * alfa)
    q = C.fromRhoTheta(0.9, alfa)
    a, b, c = q, w, q * w
    for _ in range(N):
        # rotim complet triunghiul in jurul originii:
        for _ in range(N):
            C.fillNgon([a, b, c], Color.Midnightblue)
            a *= w
            b *= w
            c *= w
        # trecem triunghiul pe nivelul inferior:
        a *= q
        b *= q
        c *= q
    C.refreshScreen()


if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(TriunghiuriSpiralate)
```

Cu titlul de exerciţiu de încălzire, propun cititorului să coloreze ca în Figura 2 aceeaşi reţea de puncte.

Definiţie. *Numim spirală logaritmică o curbă care admite o reprezentare parametrică de forma*

$$(\Gamma) \quad z(t) = q + u_0 e^{\lambda t}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

unde $\lambda = a + ib$ este un parametru complex cu $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, iar q şi u_0 sunt două numere complexe cu $u_0 \neq 0$.

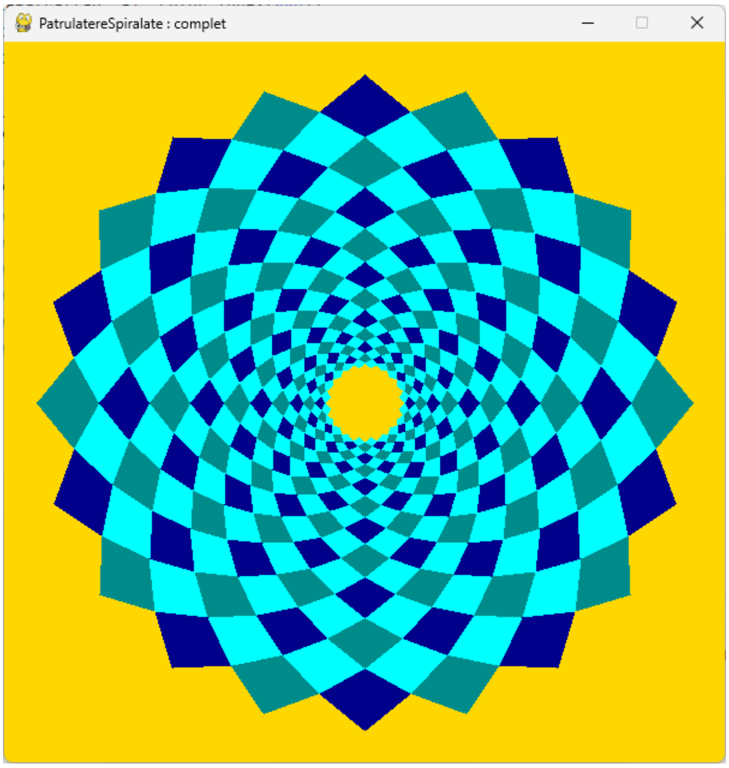

Figura 2: Exerciţiu de încălzire

Observaţie. Cazul $a = 0$ corespunde cercului iar $b = 0$ dreptei. Dacă $u_0 = 0$ traiectoria lui $z = z(t)$ se reduce la un punct.

Notăm cu $r = r(t)$ distanţa de la punctul q la punctul curent $z(t)$ şi cu $\theta = \theta(t)$ unghiul făcut de semidreapta de la q la $z(t)$ cu orizontala. Ţinând cont de expresia funcţiei exponenţiale

$$e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

obţinem

$$r(t) = |z(t) - q| = |u_0|e^{\lambda t} = r_0 e^{at}, \tag{2}$$

$$\theta(t) = \arg(z(t) - q) = \arg(u_0) + \arg e^{\lambda t} = \theta_0 + bt, \tag{3}$$

unde am notat $r_0 = |u_0|$ şi $\theta_0 = \arg u_0$. Din ultima relaţie rezultă că punctul curent $z = z(t)$ se roteşte în jurul punctului fix q cu viteză unghiulară constantă

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = (\theta_0 + bt)' = b \neq 0,$$

în timp ce se apropie de acesta, dacă $a < 0$, sau se îndepărtează, dacă $a > 0$, după legea exponenţială dată de (2). Parametrizarea (1) descrie astfel o mişcare în spirală în jurul centrului q.

Observăm că prin schimbarea de variabilă $u = z - q$, care reprezintă o translaţie, obţinem pentru $u = u(t)$ legea de mişcare

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t},$$

iar aceasta este o mişcare pe o spirală logaritmică centrată în origine.

Deoarece orice spirală logaritmică poate fi translatată astfel cu centrul în origine, vom prezenta în continuare proprietăţile geometrice ale curbei (Γ) considerând numai cazul $q = 0$.

Proprietatea definitorie a spiralei logaritmice este următoarea:

Propoziţia 1. *O curbă este o spirală logaritmică dacă şi numai dacă unghiul dintre raza vectoare a punctului curent şi tangenta la curbă este constant, diferit de zero (caz în care curba este o dreaptă) şi de unghiul drept (caz în care curba este un cerc).*

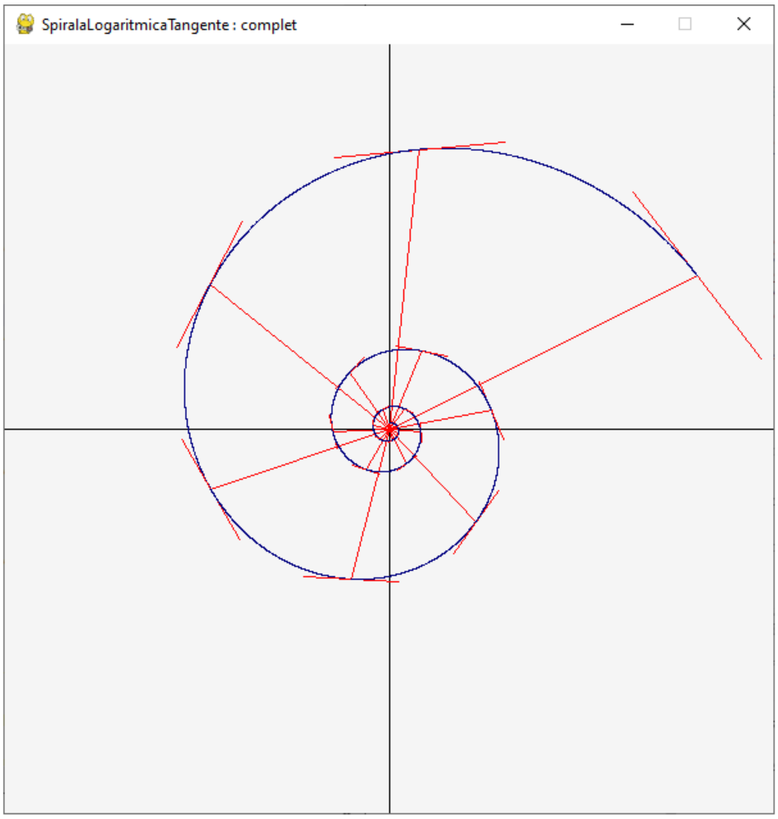

Figura 3: `SpiralaLogaritmicaTangente()`

Demonstraţie. Fie (Γ) spirala logaritmică dată de ecuaţia

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t}.$$

Unghiul $\varphi = \varphi(t)$ dintre raza vectoare şi tangentă este unghiul dintre direcţiile lui $z(t)$ şi $z'(t)$, unghi care apare în definiţia produsului scalar

$$< z(t), z'(t) >= |z(t)||z'(t)| \cos\varphi(t).$$

Prin urmare

$$\cos\varphi(t) = \frac{< z(t), z'(t) >}{|z(t)||z'(t)|} = \frac{< z(t), \lambda z(t) >}{|z(t)||\lambda z(t)|} =$$

$$= \frac{1}{|\lambda||z(t)|^2} \cdot \frac{1}{2}\left(z(t)\overline{\lambda z(t)} + \overline{z(t)}\lambda z(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{|\lambda||z(t)|^2} \cdot \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}|z(t)|^2 + \lambda|z(t)|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda} + \lambda\right) = \frac{Re\lambda}{|\lambda|} = const.$$

Aici am folosit expresia produsului scalar în complex:

$$< u, v >= \frac{1}{2}(u\bar{v} + \bar{u}v).$$

Implicaţia inversă, dacă (Γ) are proprietatea descrisă atunci este o spirală logaritmică, se justifică pe baza rezultatelor de unicitate locală din teoria ecuaţiilor diferenţiale, şi este lăsată cititorului.

Următorul program ilustrează această proprietate, vezi Figura 3:

```
import ComplexPygame as C
import Color
import cmath
def SpiralaLogaritmicaTangente():
    r = 2.5
    C.setXminXmaxYminYmax(-r, r, -r, r)
    Lambda = complex(-0.2, 1.0)
    z0 = complex(2.0, 1.0)
    C.setAxis()
    T = 20  # t in [0,T]
    N = 20000  # nr. puncte
    deltat = T / N
    for k in range(N):
        t = k * deltat
        z = z0 * cmath.exp(Lambda * t)  # z = z(t)
        C.setPixel(z, Color.Navy)
        if k % 1000 == 0:
```

```
            zprim = Lambda * z  # zprim = z'(t)
            dt = 0.3
            C.drawLine(z - zprim * dt, z + zprim * dt, Color.Red)
            C.drawLine(0, z, Color.Red)
            if C.mustClose():
                return

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(SpiralaLogaritmicaTangente)
```

O altă proprietate remarcabilă a spiralei logaritmice este următoarea:

Propoziţia 2. *Rotirea unei spirale logaritmice în jurul centrului său are acelaşi efect ca o scalare în raport cu centrul.*

Demonstraţie. Fie $z(t) = z_0 e^{\lambda t}$ ecuaţia spiralei date. Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$ avem relaţia

$$z(t+\theta) = z_0 e^{\lambda(t+\theta)} = z_0 e^{\lambda t} e^{\lambda\theta} = z(t)e^{a\theta}(\cos b\theta + i \sin b\theta),$$

pe care o scriem sub forma

$$(\cos b\theta + i \sin b\theta)z(t) = e^{-a\theta} z(t+\theta).$$

Egalitatea de mai sus arată că punctul curent $z(t)$ rotit în jurul originii cu unghiul $b\theta$ ajunge în acelaşi loc ca punctul $z(t+\theta)$ de pe spirala dată scalat cu factorul real $e^{-a\theta}$.

Această proprietate care i-a fascinat pe cei care au descoperit-o, vezi de exemplu `https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral`, este pusă în evidenţă printr-o animaţie grafică de clasa următoare.

Animaţia are două părţi: în prima parte este afişată spirala memorată în lista `sp`, scalată în mod repetat cu facorul `alfa = 1.001`, iar în a doua parte este afişată aceeaşi spirală rotită în mod repetat cu un unghi de $\pi/500$ radiani. Observaţi că efectul vizual este acelaşi.

```
import ComplexPygame as C
import Color
import cmath
import math


def SpiraMirabilis():
    def spirala(Lambda, T, N):
        dt = T / N
        return [cmath.exp(k * dt * Lambda) for k in range(N)]
```

```
    def transforma(sp, omega):
        for k in range(len(sp)):
            sp[k] *= omega

    def traseaza(spirala):
        for k in range(1, len(spirala)):
            C.drawLine(spirala[k - 1], spirala[k], Color.Index(20 * k))

    C.setXminXmaxYminYmax(-0.5, 0.5, -0.5, 0.5)
    Lambda = complex(-0.1, 0.8)
    T = 100
    N = 1000
    sp = spirala(Lambda, T, N)

    # iteram scalarea  cu factor alfa
    alfa = 1.001
    for t in range(1000):
        C.fillScreen()
        transforma(sp, alfa)
        traseaza(sp)
        C.setAxis()
        if C.mustClose(): return

    # iteram rotatia cu unghi fi
    sp = spirala(Lambda, T, N)
    fi = math.pi / 500
    omega = C.fromRhoTheta(1, fi)
    for t in range(10000):
        C.fillScreen()
        transforma(sp, omega)
        traseaza(sp)
        C.setAxis()
        if C.mustClose(): return

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(SpiraMirabilis)
```

Propoziţia 3. *Spirală logaritmică transformă orice progresie aritmetică a argumentului într-o progresie geometrică pe curbă.*

Demonstraţie. Fie $t_n = t_0 + n\theta$ o progresie aritmetică de raţie $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$. Notăm $z_n = z(t_n)$ şi avem

$$z_{n+1} = z(t_{n+1}) = z(t_n + \theta) = z_0 e^{\lambda(t_n+\theta)} = z_0 e^{\lambda t_n} e^{\lambda\theta} = z_n e^{\lambda\theta}$$

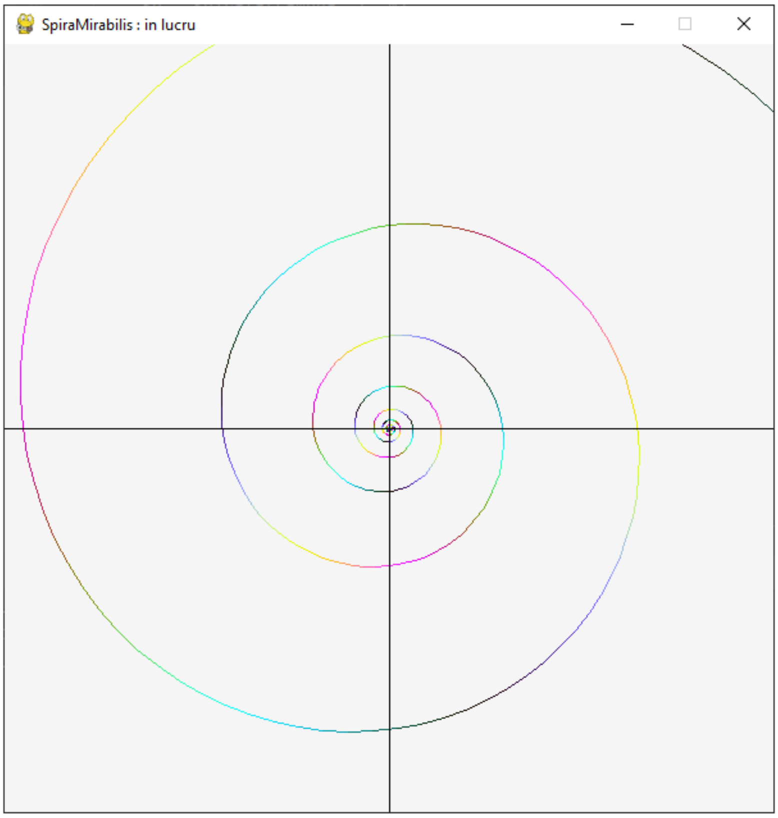

Figura 4: `SpiraMirabilis()`

prin urmare

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = e^{\lambda\theta} = \omega = const.$$

ceea ce trebuia arătat.

Ultima relaţie spune că toate triunghiurile $0z_nz_{n+1}$ sunt toate asemenea între ele.

Triunghiul $0z_nz_{n+1}$ degenerează când raportul ω este un număr real. Cel mai mic $\theta > 0$ pentru care

$$\text{Im } \omega = \text{Im } e^{\lambda\theta} = e^{a\theta} \sin b\theta = 0$$

este $\theta = \frac{\pi}{b}$, caz în care z_n sunt toate punctele de intersecţie cu spirala ale unei drepte care trece prin origine. Pentru

$$\theta = \frac{2\pi}{b}$$

obţinem punctele de intersecţie cu spirala ale unei raze vectoare. Din cele arătate mai sus rezultă că distanţele până la origine ale acestor puncte formează o pro-

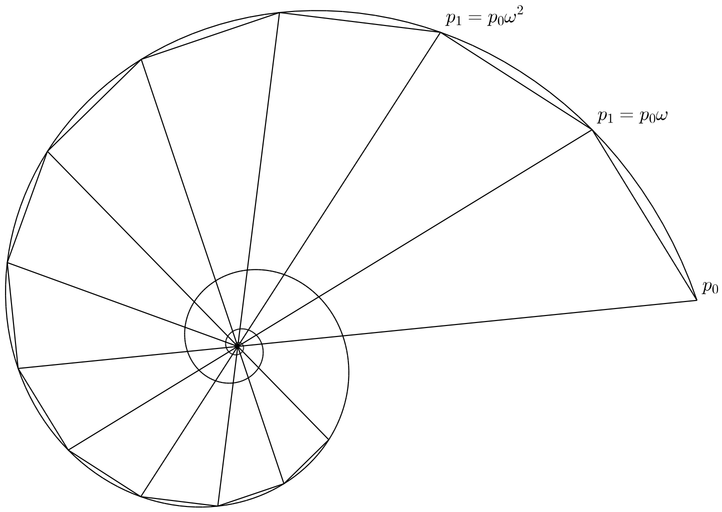

Figura 5: Progresia geometrică

gresie geometrică reală, cu raţia

$$|\omega| = |e^{2\pi\lambda}| = e^{2\pi a}.$$

Are loc şi proprietatea reciprocă:

Propoziţia 4. *Punctele oricărei progresii geometrice având raţia*

$$\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

cu $\rho \neq 1$ şi $\theta \neq k\pi$, se află pe o spirală logaritmică cu centrul în origine.

Observaţie. Cazurile exceptate corespund cercului, respectiv dreptei.

Demonstraţie. Considerăm progresia geometrică $p_n = p_0\omega^n$ cu raţia $\omega \in \mathbb{C}$ satisfăcând cerinţele. Avem

$$\omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \left(e^{\ln\rho}\right)^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) =$$

$$= e^{n\ln\rho}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = e^{n\ln\rho + in\theta} = e^{\lambda n}$$

unde

$$\lambda = \ln\rho + i\theta. \tag{4}$$

Prin urmare punctele p_n se află pe spirala logaritmică

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t},$$

cu $z_0 = p_0$ şi λ dat de (4), deoarece

$$p_n = p_0 \omega^n = p_0 e^{\lambda n} = z(n).$$

Foarte interesant este faptul că şi seria geometrică se înscrie pe o spirală logaritmică:

Propoziţia 4. *Sumele parţiale ale oricărei progresii geometrice având raţia*

$$\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

cu $\rho \neq 1$ şi $\theta \neq k\pi$, se află pe o spirală logaritmică.

Demonstraţie. Considerăm progresia geometrică $p_n = p_0\omega^n$. Avem

$$s_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n = p_0(1 + \omega + \cdots + \omega^n) =$$

$$= p_0 \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega} = \frac{p_0}{1-\omega} - \frac{p_0\omega}{1-\omega}\omega^n = \frac{p_0}{1-\omega} - \frac{p_0\omega}{1-\omega}e^{\lambda n},$$

cu λ dat de (4). Notăm $q = \frac{p_0}{1-\omega}$ şi $z_0 = p_0$, şi obţinem

$$s_n = q + (z_0 - q)e^{\lambda n},$$

deci, conform formulei (1), punctele s_n se află pe spirala logaritmică de centrul q şi parametri z_0 şi λ, vezi Figura 6.

Observaţie. În figurile ilustrative pentru ultimile două propoziţii a fost aleasă raţia ω subunitară în modul pentru o mai bună încadrare a imaginilor, deoarece în acest caz spiralele se înfăşoară în jurul centrului, dar rezultatele sunt adevărate şi pentru $|\omega| > 1$, când spiralele se desfăşoară.

Propoziţia 5. *Fie (a_n) un şir de puncte în planul complex astfel încât linia poligonală a_0,a_1,a_2, ... are următoarele două proprietăţi:*

(*i*) *toate unghiurile dintre două laturi consecutive au aceeaşi măsură, diferită de $k\pi$, k întreg;*

(*ii*) *toate rapoartele $\frac{\ell(a_n a_{n+1})}{\ell(a_{n-1}a_n)}$ dintre lungimile laturilor consecutive au aceeaşi valoare, $\rho \neq 1$.*

În aceste condiţii linia poligonală are vârfurile pe o spirală logaritmică şi, în plus, dacă raportul ρ este subunitar atunci şirul a_n este convergent la punctul q, centrul spiralei.

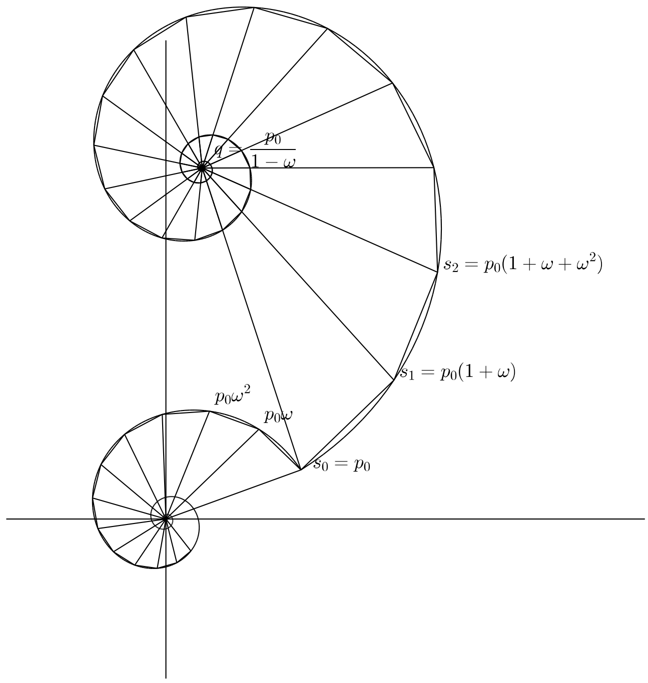

Figura 6: Seria geometrică

Demonstraţie. Arătăm că următorul raport este constant şi îl notăm cu ω:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}} = \omega = const.$$

Într-adevăr, avem

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\right| = \frac{|a_{n+1}-a_n|}{|a_n-a_{n-1}|} = \frac{\ell(a_n a_{n+1})}{\ell(a_{n-1}a_n)} = \rho$$

şi

$$\arg\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}} = \arg(a_{n+1}-a_n) - \arg(a_{n+1}-a_n) = const.$$

fiind unghiul dintre două laturi consecutive.

Prin urmare, avem relaţiile

$$a_2 - a_1 = \omega(a_1 - a_0),$$

$$a_3 - a_2 = \omega(a_2 - a_1) = \omega^2(a_1 - a_0),$$

$$\dots$$

$$a_{n+1} - a_n = \omega(a_n - a_{n-1}) = \omega^n(a_1 - a_0),$$

care sumate conduc la

$$a_{n+1} - a_1 = (\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n)(a_1 - a_0) = \omega \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}(a_1 - a_0).$$

De aici, după un calcul simplu, urmează că

$$a_{n+1} - \frac{a_1 - \omega a_0}{1 - \omega} = \frac{a_0 - a_1}{1 - \omega}\omega^{n+1}$$

de unde, notând

$$q = \frac{a_1 - \omega a_0}{1 - \omega},$$

deducem că şirul $b_n = a_n - q$ este o progresie geometrică cu raţia ω. Din Propoziţia 4 urmează că punctele b_n se află pe o spirală logaritmică cu centrul în origine, prin urmare translatata acesteia cu vectorul q va fi spirala căutată.

Următorul script trasează, plecând de la trei puncte a_0, a_1 şi a_2 fixate arbitrar, linia poligonală cu proprietăţile (i) şi (ii) unic determinată de cele trei puncte iniţiale, precum şi spirala logaritmică pe care se află vârfurile ei.

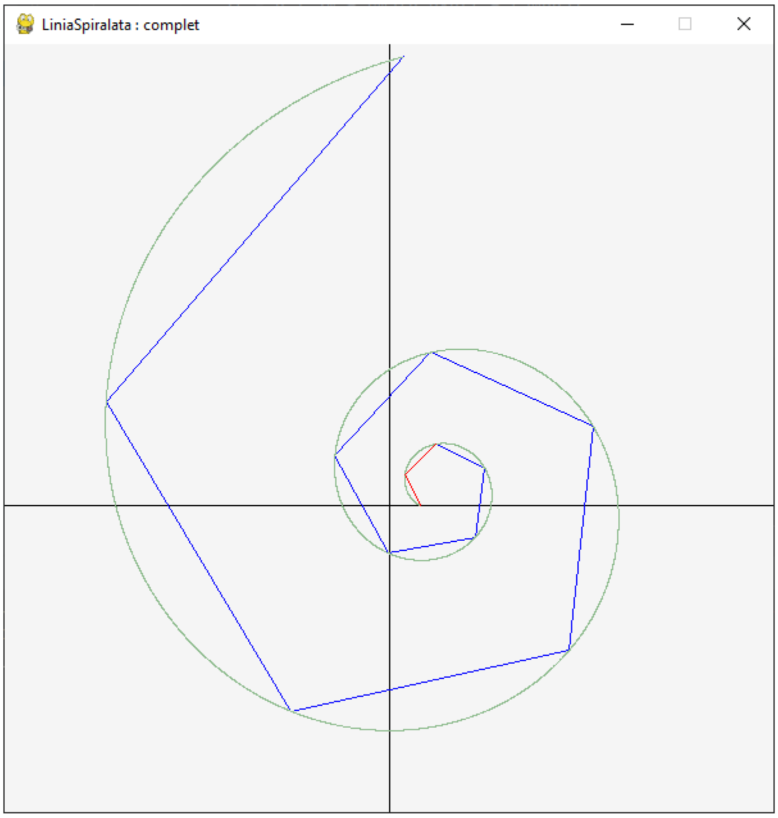

Figura 7: Linia poligonală

```python
import ComplexPygame as C
import Color
import cmath
import math

def LiniaSpiralata():
    def traseazaSpirala(a0, a1, a2):
        # trasam linia poligonala
        omega = (a2 - a1) / (a1 - a0)
        N = 12
        aTrec, aPrez = a1, a2
        for k in range(N-1):
            C.drawLine(aTrec, aPrez, Color.Blue)
            aTrec, aPrez = aPrez, aPrez + omega * (aPrez - aTrec)

        # trasam spirala logaritmica
        Lambda = complex(math.log(C.rho(omega)), C.theta(omega))
        z0 = (a0 - a1) / (1 - omega)
        q = (a1 - a0 * omega) / (1 - omega)
        for k in range(1000 * N):
            t = k * 0.001
            zt = q + z0 * cmath.exp(t * Lambda)
            C.setPixel(zt, Color.Darkseagreen)

    C.setXminXmaxYminYmax(-25, 25, -20, 30)
    C.setAxis()
    a0 = 2
    a1 = 1 + 2j
    a2 = 3 + 4j
    traseazaSpirala(a0, a1, a2)
    C.drawLine(a0, a1, Color.Red)
    C.drawLine(a1, a2, Color.Red)
    C.refreshScreen()

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(LiniaSpiralata)
```

În continuare prezentăm două aplicaţii celebre ale Propoziţiei 5.

Spirala de aur. Dintre toate dreptunghiurile, cele mai armonioase se consideră a fi cele pentru care raportul dintre lungimea L şi lăţimea l, notat cu

$$\varphi = \frac{L}{l},$$

este astfel ales încât dacă decupăm din dreptunghiul dat un pătrat cu latura l, vezi Figura 8, drepunghiul care rămâne are laturile tot în acelaşi raport, mai precis dacă are loc egalitatea

$$\frac{l}{L-l} = \varphi.$$

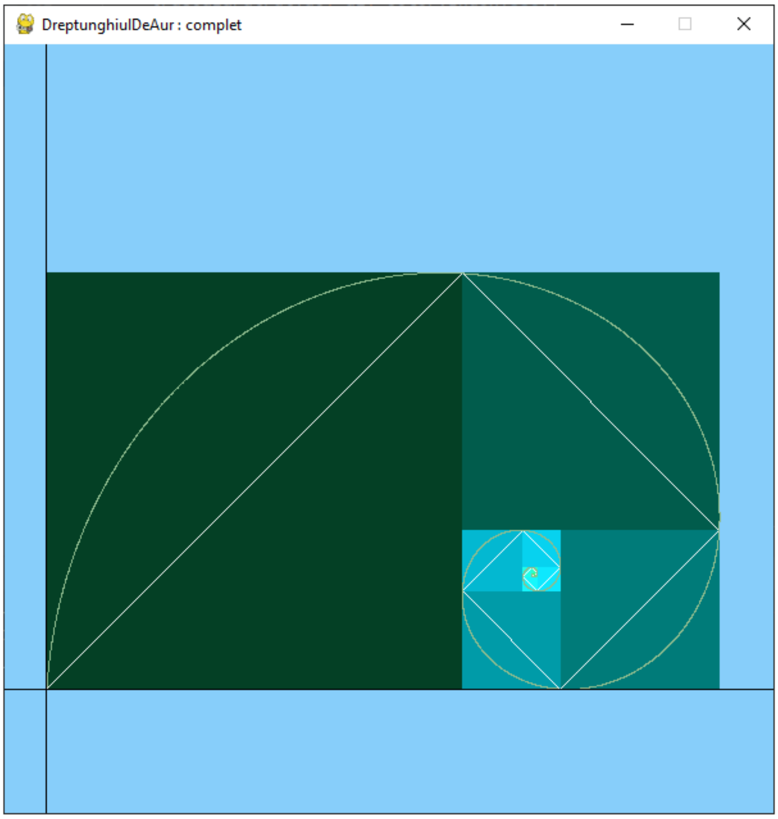

Figura 8: Spirala de aur

Din aceste relaţii rezultă imediat că raportul φ, numit *raportul de aur*, este soluţia pozitivă a ecuaţiei

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

adică

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots.$$

Numărul φ şi dreptunghiul de aur au multe proprietăţi[2], noi suntem interesaţi aici doar de *spirala de aur*: drepunghiul rămas după decuparea pătratului este tot un dreptunghi de aur, deci după ce decupăm şi din acesta un pătrat rămânem tot cu un dreptunghi de aur, şi aşa mai departe. Dacă alegem modul de decupare ca în Figura 8 obţinem o spirală de pătrate.

Problemă. *Să se arate că centrele pătratelor din Figura 8 formează un şir convergent la un punct q, aflat în interiorul tuturor dreptunghiurilor de aur obţinute prin decupările succesive.*

Rezolvare. Acum prima parte a enunţului este foarte uşor de demonstrat: este suficient să observăm că linia poligonală formată de diagonalele galbene ale pătratelor are proprietăţile cerute de Propoziţia 5, cu raportul dintre laturile consecutive subunitar

$$\rho = \frac{1}{\varphi} = 0.618\cdots < 1.$$

Din propoziţia menţionată rezultă că vârfurile acestor diagonale sunt situate pe o spirală logaritmică, numită *spirala de aur*, şi deoarece raportul ρ este subunitar, şirul vârfurilor este convergent la centrul q al spiralei. Evident că în acest caz şi mijloacele diagonalelor formează un şir convergent la q.

Partea a doua a problemei este lăsată spre rezolvare cititorului.

Triunghiul de aur. Raportul de aur apare în mod natural în pentagonul regulat, emblema şcolii lui Pitagora, fiind raportul dintre lungimea diagonalei şi lungimea laturii. Semnalăm, cu notaţiile din Figura 9, şi alte apariţii ale lui φ:

$$\varphi = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DF} = \frac{DF}{FG}.$$

Triunghiul isoscel ΔACD, cu unghiul de la vârf (apexul) $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{5}\,\text{rad} = 36^\circ$ şi unghiurile de la bază $\widehat{C} = \widehat{D} = \dfrac{2\pi}{5}\,\text{rad} = 72^\circ$, are proprietea că bisectoarea CF a unghiului de la bază $\widehat{C}$, de exemplu, îl împarte în două triunghiuri, dintre care unul, ΔCDF, este asemenea cu cel dat, având aceleaşi măsuri pentru unghiuri, după cum este uşor de constatat.

Un astfel de triunghi, cu unghiurile de 36°, 72° şi 72°, este numit *triunghi de aur*.

Prin urmare: secţionăm triunghiul de aur ΔACD şi obţinem alt triunghi de aur, ΔCDF, îl secţionăm şi pe acesta şi obţinem încă unul, şi continuăm tot aşa. Dacă alegem modul de secţionare ca în Figura 9, obţinem o spirală de triunghiuri.

Problemă. *Arătaţi că toate triunghiurile de aur obţinute prin procedeul de mai sus au vârfurile pe o spirală logaritmică şi trasaţi această spirală.*

Rezolvare. Aplicăm Propoziţia 5 pentru linia poligonală $ACDFG\ldots$ şi actualizăm funcţia `LiniaSpiralata`.

[2] vezi `https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio`

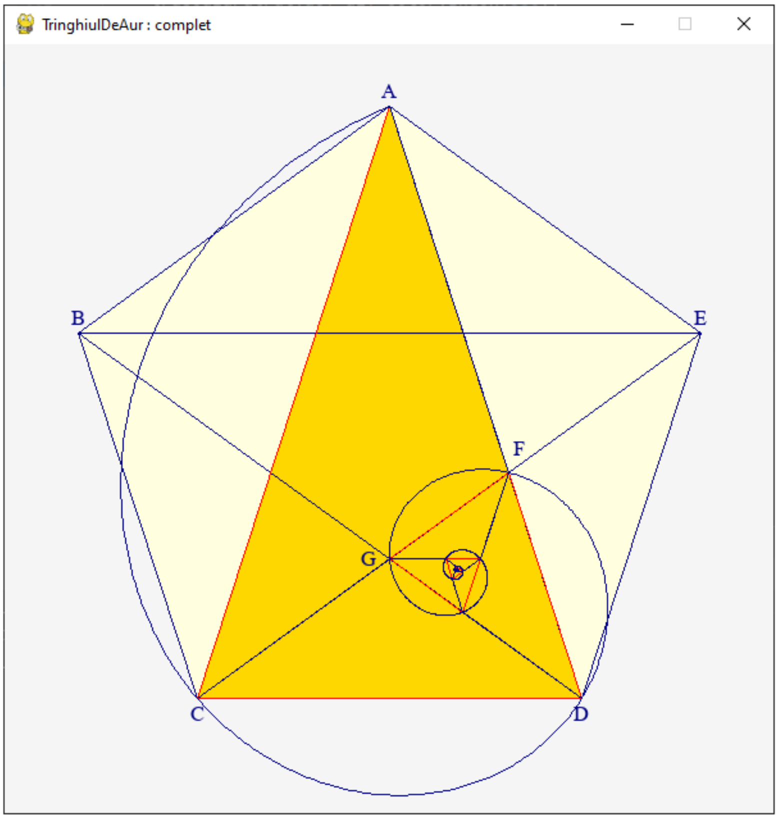

Figura 9: Triunghiul de aur