A Discrete Structural Representation of Prime and Composite Numbers and Its Relation to the Riemann Zeta Framework

Gheorghe Parascan, Maria Margoș, Ally Constantin Margoș
gheorgheparascan@gmail.com

Abstract
We introduce a discrete geometric representation of natural numbers based on a divisibility table structure, referred to as the **Parascan–Margoș fractal divisibility table**. In this representation, the positions of prime and composite numbers emerge naturally from the intersection of divisibility relations arranged in a triangular lattice.
This paper investigates the structural properties of this table and discusses its conceptual relation to major constructs of analytic number theory, including the **Riemann zeta function**, the **Euler product**, and the distribution of primes associated with the **Riemann Hypothesis**.
The study emphasizes the distinction between the discrete structural representation of primes and the analytic tools traditionally used to study their global distribution.

1. Introduction
Prime numbers occupy a central position in number theory. Their distribution is deeply connected with the properties of the **Riemann zeta function**, whose analytic continuation and zeros encode information about the density and oscillations of primes. While analytic number theory studies primes using complex analysis and asymptotic approximations, divisibility relations themselves are fundamentally discrete. The structure introduced in this paper attempts to represent these relations geometrically in a two-dimensional lattice that makes the positions of primes and composites visually observable.
This representation can be interpreted as a structural visualization related to classical constructions such as the **Sieve of Eratosthenes**, but arranged in a triangular grid revealing repeating divisibility patterns.

2. Construction of the Discrete Divisibility Table
Let the sequence of natural numbers

$$1,2,3,4,5,6,\ldots$$

be written in successive rows of a grid.
The rows are aligned vertically, but each new row is shifted by adding one additional leading zero (or empty position). This produces a triangular structure.
Each position (i, j)corresponds to the integer

$$n = i + j$$

or an equivalent indexing rule depending on the construction.
Divisibility relations are represented by marking positions where one number divides another. The resulting pattern generates diagonal structures corresponding to multiples.

3. Structural Properties
The resulting grid reveals several fundamental properties:

3.1 Multiplicative Diagonals
For any integer k, the multiples

$$k, 2k, 3k, 4k, \ldots$$

appear along diagonal trajectories within the lattice.
These diagonals represent periodic divisibility structures.

3.2 Emergence of Composite Numbers

Composite numbers occur at intersections of two or more multiplicative diagonals.
For example:

$$6 = 2 \times 3$$

appears at the intersection of the diagonal generated by 2 and the diagonal generated by 3.
Thus composite numbers correspond to **intersection nodes in the divisibility lattice**.

3.3 Emergence of Prime Numbers

Prime numbers appear as positions where **no nontrivial divisibility diagonal intersects**.
Therefore primes correspond to **gaps in the divisibility lattice**.
This geometric interpretation offers a structural visualization of primality.

4. Relation to Euler Product Structure

The **Euler product** expresses the factorization of the zeta function as

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

where the product extends over all prime numbers.
Each factor corresponds to the infinite geometric series

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots$$

which represents the contribution of multiples of a prime.
In the divisibility table, these multiples correspond precisely to the diagonal trajectories generated by each prime number. Therefore the table can be viewed as a discrete representation of the multiplicative structure encoded in the Euler product.

5. Relation to the Riemann Zeta Function

The **Riemann zeta function** is defined by

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

and its analytic properties provide deep information about the distribution of primes.
While the divisibility table is purely discrete, it reflects the same underlying multiplicative structure that allows the zeta function to be factorized into the Euler product.
Thus the table can be interpreted as a structural model of the arithmetic relationships that analytic number theory studies through complex analysis.

6. Relation to the Critical Line and the Riemann Hypothesis

The **Riemann Hypothesis** states that all nontrivial zeros of the zeta function lie on the critical line

$$\Re(s) = \frac{1}{2}.$$

These zeros govern the fluctuations in the distribution of primes.
The divisibility table does not directly encode these zeros, since it represents exact arithmetic relations rather than analytic approximations. However, it provides a discrete structure from which the distribution of primes emerges, and therefore represents the arithmetic foundation underlying analytic formulations.

7. Comparison with Classical Approaches

Traditional approaches in **Analytic Number Theory** rely on asymptotic formulas, complex analysis, and infinite series.
The discrete table differs in several ways:

- It represents exact divisibility relations.
- It provides a geometric visualization of prime emergence.
- It does not rely on probabilistic or asymptotic approximations.

However, it should be understood as **complementary** to analytic approaches rather than replacing them.

8. Structural Observations

The table reveals several visually observable patterns:

- repeating divisibility bands,
- triangular fractal-like substructures,
- regular spacing generated by primorial cycles.

Such patterns suggest possible connections with periodic structures studied in modular arithmetic and divisor lattices.

9. Conclusion

The Parascan–Margoș divisibility table provides a discrete geometric representation of the arithmetic relationships among natural numbers. In this representation, composite numbers arise as intersections of divisibility trajectories, while primes appear as gaps in the lattice.
Although this structure does not directly reproduce analytic properties such as the zeros of the **Riemann zeta function**, it reflects the multiplicative architecture that underlies the **Euler product** and therefore connects naturally with the analytic framework used to study prime distribution.
The approach highlights the complementary roles of discrete arithmetic structure and analytic techniques in modern number theory.

***

O reprezentare structurală discretă a numerelor prime și compuse și relația sa cu cadrul Funcției Zeta a lui Riemann Autori

Gheorghe Parascan, Maria Margoș, Ally Constantin Margoș

Rezumat

Introducem o reprezentare geometrică discretă a numerelor naturale bazată pe o structură de tip tabel al divizibilității, denumită **Tabelul fractal al divizorilor Parascan–Margoș**. În această reprezentare, pozițiile numerelor prime și compuse apar

în mod natural din intersecția relațiilor de divizibilitate organizate într-o rețea triunghiulară.
Lucrarea investighează proprietățile structurale ale acestui tabel și discută relația sa conceptuală cu construcții majore din teoria analitică a numerelor, inclusiv **Riemann zeta function**, **Euler product** și distribuția numerelor prime asociată **Riemann Hypothesis**.
Studiul subliniază distincția dintre reprezentarea structurală discretă a numerelor prime și instrumentele analitice utilizate în mod tradițional pentru studierea distribuției lor globale.

1. Introducere

Numerele prime ocupă o poziție centrală în teoria numerelor. Distribuția lor este profund legată de proprietățile **Riemann zeta function**, a cărei continuare analitică și ale cărei zerouri codifică informații despre densitatea și oscilațiile numerelor prime.
În timp ce teoria analitică a numerelor studiază primele folosind analiza complexă și aproximații asimptotice, relațiile de divizibilitate sunt în mod fundamental discrete. Structura introdusă în această lucrare încearcă să reprezinte aceste relații geometric într-o rețea bidimensională care face vizibile pozițiile numerelor prime și compuse.
Această reprezentare poate fi interpretată ca o vizualizare structurală legată de construcții clasice precum **Sieve of Eratosthenes**, dar aranjată într-o grilă triunghiulară care evidențiază modele repetitive ale divizibilității.

2. Construcția tabelului discret al divizibilității

Fie șirul numerelor naturale

$$1,2,3,4,5,6,\ldots$$

scris pe rânduri succesive într-o grilă.
Rândurile sunt aliniate vertical, dar fiecare rând nou este deplasat prin adăugarea unei poziții goale suplimentare în față. Astfel se obține o structură triunghiulară.
Fiecare poziție (i, j)corespunde unui număr întreg

$$n = i + j$$

sau unei reguli echivalente de indexare, în funcție de modul de construcție.
Relațiile de divizibilitate sunt reprezentate prin marcarea pozițiilor în care un număr divide altul. Modelul rezultat generează structuri diagonale corespunzătoare multipliilor.

3. Proprietăți structurale

Structura obținută evidențiază mai multe proprietăți fundamentale.

3.1 Diagonalele multiplicative

Pentru orice număr întreg k, multiplii

$$k, 2k, 3k, 4k, \ldots$$

apar de-a lungul unor traiectorii diagonale în rețea.
Aceste diagonale reprezintă structuri periodice ale divizibilității.

3.2 Apariția numerelor compuse

Numerele compuse apar la intersecția a două sau mai multe diagonale multiplicative.
De exemplu:

$$6 = 2 \times 3$$

apare la intersecția diagonalei generate de 2 cu diagonala generată de 3.
Astfel, numerele compuse corespund **nodurilor de intersecție din rețeaua divizibilității**.

3.3 Apariția numerelor prime

Numerele prime apar în poziții în care **nu intersectează nicio diagonală de divizibilitate nenulă**.
Prin urmare, primele corespund **golurilor din rețeaua divizibilității**.
Această interpretare geometrică oferă o vizualizare structurală a primalității.

4. Relația cu structura produsului Euler

Euler product exprimă factorizarea funcției Zeta sub forma

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

unde produsul se face peste toate numerele prime.
Fiecare factor corespunde seriei geometrice infinite

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots$$

care reprezintă contribuția multipliilor unui prim.
În tabelul divizibilității, acești multipli corespund exact traiectoriilor diagonale generate de fiecare prim. Astfel, tabelul poate fi privit ca o reprezentare discretă a structurii multiplicative codificate în produsul Euler.

5. Relația cu Funcția Zeta

Riemann zeta function este definită prin

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

iar proprietățile sale analitice oferă informații profunde despre distribuția numerelor prime.
Deși tabelul divizibilității este complet discret, el reflectă aceeași structură multiplicativă care permite factorizarea funcției Zeta în produsul Euler.
Prin urmare, tabelul poate fi interpretat ca un model structural al relațiilor aritmetice pe care teoria analitică a numerelor le studiază prin analiza complexă.

6. Relația cu axa critică și Ipoteza lui Riemann

Riemann Hypothesis afirmă că toate zerourile netriviale ale funcției Zeta se află pe axa critică

$$\Re(s) = \frac{1}{2}.$$

Aceste zerouri controlează fluctuațiile distribuției numerelor prime.
Tabelul divizibilității nu codifică direct aceste zerouri, deoarece el reprezintă relații aritmetice exacte și nu aproximații analitice. Totuși, el oferă o structură discretă din care distribuția numerelor prime emerge, reprezentând astfel fundamentul aritmetic al formulărilor analitice.

7. Comparația cu abordările clasice

Abordările tradiționale din **Analytic Number Theory** se bazează pe formule asimptotice, analiză complexă și serii infinite.
Tabelul discret diferă prin faptul că:

- reprezintă relații exacte de divizibilitate,
- oferă o vizualizare geometrică a apariției numerelor prime,
- nu se bazează pe aproximații probabilistice sau asimptotice.

Totuși, el trebuie înțeles ca **o abordare complementară**, nu ca un înlocuitor al metodelor analitice.

8. Observații structurale

Tabelul evidențiază mai multe modele observabile vizual:

- benzi repetitive de divizibilitate,
- substructuri triunghiulare de tip fractal,
- spațieri regulate generate de ciclurile primoriale.

Aceste modele sugerează posibile legături cu structuri periodice studiate în aritmetica modulară și în rețelele divizorilor.

9. Concluzie

Tabelul divizibilității Parascan–Margoș oferă o reprezentare geometrică discretă a relațiilor aritmetice dintre numerele naturale. În această reprezentare, numerele compuse apar ca intersecții ale traiectoriilor de divizibilitate, iar numerele prime apar ca goluri în rețea.

*Deși această structură nu reproduce direct proprietățile analitice, precum zerourile **Riemann zeta function**, ea reflectă arhitectura multiplicativă care stă la baza **Euler product** și se conectează astfel în mod natural cu cadrul analitic utilizat pentru studierea distribuției numerelor prime.*

Această abordare evidențiază rolurile complementare ale structurii aritmetice discrete și ale tehnicilor analitice în teoria modernă a numerelor.