

# Arithmetic Divisibility Operators and the Connection with Dirichlet Series and the Riemann Zeta Function

*Gheorghe Parascan, Maria Margos, Ally Constantin Margos*

[gheorgheparascan@gmail.com](mailto:gheorgheparascan@gmail.com)

## Abstract

In this article we introduce arithmetic operators derived from the divisibility structure of the natural numbers represented in the Parascan–Margos Fractal Divisibility Table. These operators transform functions defined on natural numbers by aggregating values along divisibility relations. We show that this operatorial structure naturally leads to Dirichlet series and to the Euler product representation of the Riemann zeta function. Thus, the discrete approach based on the divisibility table becomes compatible with classical formulations in analytic number theory.

## 1. Introduction

The fundamental structure of the natural numbers is determined by the relation of **divisibility**.

In the Parascan–Margos Table this relation is represented explicitly:

- each row represents the multiples of a number
- each column represents the divisors of a number.

<b>1</b> (1,1)	<b>2</b> (1,2)	<b>3</b> (1,3)	<b>4</b> (1,2,4)	<b>5</b> (1,5)	<b>6</b> (1,2,3,6)
<b>7</b> (1,7)	<b>8</b> (1,2,4,8)	<b>9</b> (1,3,9)	<b>10</b> (1,2,5,10)	<b>11</b> (1,11)	<b>12</b> (1,2,3,4,6,12)
<b>13</b> (1,13)	<b>14</b> (1,2,7,14)	<b>15</b> (1,3,5,15)	<b>16</b> (1,2,4,8,16)	<b>17</b> (1,17)	<b>18</b> (1,2,3,6,9,18)
<b>19</b> (1,19)	<b>20</b> (1,2,4,5,10,20)	<b>21</b> (1,3,7,21)	<b>22</b> (1,2,11,22)	<b>23</b> (1,23)	<b>24</b> (1,2,3,4,6,8,12,24)
<b>25</b> (1,5,25)	<b>26</b> (1,2,13,26)	<b>27</b> (1,3,9,27)	<b>28</b> (1,2,4,7,14,28)	<b>29</b> (1,29)	<b>30</b> (1,2,3,5,6,10,15,30)
<b>31</b> (1,31)	<b>32</b> (1,2,4,8,16,32)	<b>33</b> (1,3,11,33)	<b>34</b> (1,2,17,34)	<b>35</b> (1,5,7,35)	<b>36</b> (1,2,3,4,6,9,12,18,36)...
<b>37</b> (1,37)	<b>38</b> (1,2,19,38)	<b>39</b> (1,3,13,39)	<b>40</b> (1,2,4,5,8,10,20,40)	<b>41</b> (1,41)	<b>42</b> (1,2,3,6,7,14,21,42)
<b>43</b> (1,43)	<b>44</b> (1,2,4,11,22,44)	<b>45</b> (1,3,5,9,15,45)	<b>46</b> (1,2,23,46)	<b>47</b> (1,47)	<b>48</b> (1,2,3,4,6,8,12,16,24,48)
<b>49</b> (1,7,49)	<b>50</b> (1,2,5,10,25,50)	<b>51</b> (1,3,17,51)	<b>52</b> (1,2,4,13,26,52)	<b>53</b> (1,53)	<b>54</b> (1,2,3,6,9,18,27,54)
<b>55</b> (1,5,11,55)	<b>56</b> (1,2,4,7,8,14,28,56)	<b>57</b> (1,3,19,57)	<b>58</b> (1,2,29,58)	<b>59</b> (1,59)	<b>60</b> (1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60)
<b>61</b> (1,61)	<b>62</b> (1,2,31,62)	<b>63</b> (1,3,7,9,21,63)	<b>64</b> (1,2,4,8,16,32,64)	<b>65</b> (1,5,13,65)	<b>66</b> (1,2,3,6,11,22,33,66)

This organization makes it possible to define **natural arithmetic operators** acting on functions defined on the set of natural numbers.

## 2. Arithmetic Functions

An arithmetic function is a function

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

which assigns a complex value to each natural number.

Classical examples include:

- the constant function  $1(n) = 1$
- the Möbius function  $\mu(n)$
- the divisor-counting function  $d(n)$
- Euler's totient function  $\varphi(n)$

## 3. The Divisor Summation Operator

We define the operator

$$Df(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

where the sum is taken over all divisors of  $n$ .

### Interpretation in the table

In the Parascan–Margoş Table:

- the divisors of  $n$  appear in the column corresponding to  $n$ .

Therefore the operator  $D$  aggregates the values of the function along the entire column

### Example

If

$$f(n) = 1$$

then

$$Df(n) = d(n)$$

where  $d(n)$  is the divisor-counting function.

## 4. Dirichlet Convolution

For two arithmetic functions  $f$  and  $g$  we define

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

This operation is called **Dirichlet convolution**.

### Theorem 1

The operator  $D$  can be expressed as a Dirichlet convolution

$$Df = f * 1$$

where  $1(n) = 1$ .

### Proof

By definition

$$(f * 1)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot 1(n/d)$$

but

$$1(n/d) = 1$$

therefore

$$\left( f * 1 \right)(n) = \sum_{d|n} f(d) = Df(n)$$

## 5. Dirichlet Series

For an arithmetic function  $f$  we define the Dirichlet series

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

where  $s$  is a complex variable.

### Theorem 2

If

$$h = f * g$$

then the corresponding Dirichlet series satisfy

$$H(s) = F(s)G(s)$$

This property reflects the multiplicative structure of the natural numbers.

## 6. The Riemann Zeta Function

The zeta function is defined as

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

for

$$\Re(s) > 1$$

## 7. Euler Product

Leonhard Euler showed that

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

### Structural interpretation

In the Parascan–Margoş Table:

- each prime generates a fundamental column
- its multiples form a family of positions.

The Euler product reflects precisely the fact that every natural number has a unique prime factorization.

## 8. The Multiplicative Operator

We define the operator

$$M_p f(n) = f(pn)$$

which shifts the function along multiples of the prime  $p$ .

### Interpretation

In the table this operator corresponds to moving along the row of multiples of  $p$ .

## 9. Operatorial Structure

The operators defined above form an algebraic structure reflecting

- the prime factorization of integers
- the structure of the divisibility network.

This structure may be viewed as a **discrete operatorial system of arithmetic**.

## 10. Connection with the Fractal Structure

Multiplicative operators generate scaled copies of the numerical structure.

Thus these arithmetic operators reflect the same **multiplicative self-similarity** discussed in the previous articles.

## 11. Implications for the Zeta Function

From the operatorial perspective:

- each prime acts as a generator of a family of multiples
- the interaction of these families produces the global structure of integers.

The zeta function can therefore be interpreted as a global summation over this structure.

## 12. Conclusions

We have introduced natural arithmetic operators derived from the divisibility structure of the natural numbers.

The main results are:

- the divisor summation operator corresponds to Dirichlet convolution
- Dirichlet series reflect the multiplicative structure of integers
- the Euler product of the zeta function arises naturally from prime factorization.

These results show that the discrete structure represented by the Parascan–Margoș Table is compatible with the classical formulations of analytic number theory.

In the next article we will analyze the **spectral interpretation of arithmetic operators**, leading to a perspective on the **critical line of the Riemann zeta function**.

\*\*\*

# Operatorii aritmetici ai divizibilității și conexiunea cu seriile Dirichlet și funcția Zeta a lui Riemann

Gheorghe Parascan, Maria Margoș, Ally Constantin Margoș

## Rezumat

În acest articol introducem operatori aritmetici derivați din structura de divizibilitate a numerelor naturale reprezentată în Tabelul Fractal Parascan–Margoș. Acești operatori transformă funcții definite pe numere naturale prin agregarea valorilor de-a lungul relațiilor de divizibilitate. Se arată că această structură operatorială conduce natural la seriile Dirichlet și la produsul Euler al funcției zeta a lui Riemann. Astfel, abordarea discretă a tabelului de divizibilitate devine compatibilă cu formulările clasice din teoria analitică a numerelor.

## 1. Introducere

Structura fundamentală a numerelor naturale este determinată de relația de **divizibilitate**.

În Tabelul Parascan–Margoș această relație este reprezentată explicit:

- fiecare linie reprezintă multiplii unui număr
- fiecare coloană reprezintă divizorii unui număr.

Această organizare permite definirea unor **operatori aritmetici naturali** care acționează asupra funcțiilor definite pe mulțimea numerelor naturale.

## 2. Funcții aritmetice

O funcție aritmetică este o funcție

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

care asociază fiecărui număr natural o valoare complexă.

Exemple clasice:

- funcția unitate  $1(n) = 1$
- funcția Möbius  $\mu(n)$
- funcția numărului de divizori  $d(n)$
- funcția totient Euler  $\varphi(n)$

## 3. Operatorul de sumare peste divizori

Definim operatorul

$$Df(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

unde suma este luată peste toți divizorii lui  $n$ .

### Interpretare în tabel

În Tabelul Parascan–Margoș:

- divizorii lui  $n$  apar pe coloana lui  $n$

Prin urmare operatorul  $D$  agregă valorile funcției pe întreaga coloană.

### Exemplu

Dacă

$$f(n) = 1$$

atunci

$$Df(n) = d(n)$$

unde  $d(n)$  este funcția numărului de divizori.

## 4. Convoluția Dirichlet

Pentru două funcții aritmetice  $f$  și  $g$  definim

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

Aceasta se numește **convoluția Dirichlet**.

### Teorema 1

Operatorul  $D$  poate fi exprimat prin convoluție Dirichlet

$$Df = f * 1$$

unde  $1(n) = 1$ .

### Demonstrație

Prin definiție

$$(f * 1)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot 1(n/d)$$

dar

$$1(n/d) = 1$$

deci

$$(f * 1)(n) = \sum_{d|n} f(d) = Df(n)$$

## 5. Seriile Dirichlet

Pentru o funcție aritmetică  $f$  definim seria Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

unde seste o variabilă complexă.

### Teorema 2

Dacă

$$h = f * g$$

atunci seriile Dirichlet satisfac relația

$$H(s) = F(s)G(s)$$

Această proprietate reflectă structura multiplicativă a numerelor naturale.

## 6. Funcția Zeta a lui Riemann

Funcția zeta este definită prin

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pentru

$$\Re(s) > 1$$

## 7. Produsul Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

### Interpretare structurală

În Tabelul Parascan–Margoș:

- fiecare prim generează o coloană fundamentală
- multiplii săi formează o familie de poziții.

Produsul Euler reflectă exact faptul că fiecare număr natural se descompune unic în factori primi.

## 8. Operatorul multiplicativ

Definim operatorul

$$M_p f(n) = f(pn)$$

care deplasează funcția de-a lungul multiplilor lui  $p$ .

### Interpretare

În tabel acest operator corespunde deplasării de-a lungul liniei multiplilor lui  $p$ .

### 9. Structura operatorială

Operatorii definiți mai sus formează o structură algebraică care reflectă:

- descompunerea în factori primi
- structura rețelei de divizibilitate.

Această structură poate fi privită ca un **sistem operatorial discret al aritmeticii**.

### 10. Legătura cu structura fractală

Operatorii de multiplicare generează copii scalate ale structurii numerelor.

Astfel, operatorii aritmetici reflectă aceeași **autosimilaritate multiplicativă** discutată în articolele anterioare.

### 11. Implicații pentru funcția Zeta

Din perspectiva operatorială:

- fiecare prim acționează ca generator al unei familii de multipli
- interacțiunea acestor familii produce structura globală a numerelor.

Funcția zeta poate fi interpretată ca o sumă globală peste această structură.

### 12. Concluzii

Am introdus operatori aritmetici naturali derivați din structura de divizibilitate a numerelor naturale.

Rezultatele principale sunt:

- operatorul de sumare peste divizori corespunde convoluției Dirichlet
- seriile Dirichlet reflectă structura multiplicativă a numerelor
- produsul Euler al funcției zeta apare natural din descompunerea în factori primi.

Aceste rezultate arată că structura discretă a Tabelului Parascan–Margoș este compatibilă cu formulările clasice ale teoriei analitice a numerelor.

În articolul următor vom analiza **interpretarea spectrală a operatorilor aritmetici**, care conduce către o perspectivă asupra **liniei critice a funcției zeta a lui Riemann**.

\*\*\*