

Divisor Symmetry and Structural Duality in the Parascan–Margoş Fractal Divisibility Table

Gheorghe Parascan, Maria Margoş, Ally Constantin Margoş

gheorgheparascan@gmail.com

Abstract

In this article we analyze the structural symmetry of divisors in the Parascan–Margoş Fractal Divisibility Table. Every divisor of a natural number generates a complementary divisor, producing a dual structure that becomes symmetric when represented in logarithmic coordinates. This symmetry leads to a natural central axis corresponding to the value $1/2$ in normalized logarithmic space. The result provides a structural interpretation that parallels the critical line appearing in the theory of the Riemann zeta function.

1. Introduction

Divisibility relations among natural numbers exhibit a fundamental structural property: every divisor of a number has a complementary divisor.

This duality is visible in the divisibility table and generates a form of symmetry that becomes particularly clear when the numbers are represented on a logarithmic scale.

Understanding this symmetry is important for several reasons:

- it reveals hidden geometric structures in the set of natural numbers
- it explains the pairing behavior of divisors
- it creates a conceptual bridge between discrete arithmetic structures and analytic formulations such as the Riemann zeta function.

2. Complementary Divisors

Let $n \in \mathbb{N}$ and let d be a divisor of n .

Then there exists another divisor

$$d' = \frac{n}{d}$$

such that

$$d \cdot d' = n$$

Thus every divisor appears in a pair.

Example

For $n = 12$:

divisors:

1,2,3,4,6,12

pairs:

(1, 12)

(2, 6)

(3, 4)

Theorem 1 (Divisor Pairing)

For every divisor d of n , there exists a complementary divisor

$$d' = \frac{n}{d}$$

and the pair satisfies

$$dd' = n$$

Proof

If $d \mid n$, then $n = dk$ for some integer k .

Therefore

$$k = \frac{n}{d}$$

which is also a divisor of n .

Thus each divisor has a complementary divisor.

3. Divisor Symmetry

The divisor pairs generate a symmetric structure around the square root of n .

If

$$d \leq \sqrt{n}$$

then

$$\frac{n}{d} \geq \sqrt{n}$$

Thus the divisor list is symmetric around

$$\sqrt{n}$$

Example

For $n = 36$:

divisors:

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

central point:

$$\sqrt{36} = 6$$

The divisors appear symmetrically around this value.

4. Logarithmic Representation

The symmetry becomes clearer when expressed in logarithmic coordinates.

Let

$$d' = \frac{n}{d}$$

Taking logarithms:

$$\log d + \log d' = \log n$$

Thus

$$\log d' = \log n - \log d$$

This means that the two divisors are symmetric around

$$\frac{\log n}{2}$$

Theorem 2 (Logarithmic Symmetry)

In logarithmic coordinates, the divisors of n are symmetric around the point

$$\frac{\log n}{2}$$

Proof

From

$$\log d + \log (n/d) = \log n$$

the midpoint between the two values is

$$\frac{\log d + \log (n/d)}{2} = \frac{\log n}{2}$$

Thus the pair is symmetric around this value.

5. Normalized Coordinates

Define the normalized coordinate

$$x = \frac{\log d}{\log n}$$

Then the complementary divisor has coordinate

$$1 - x$$

The symmetry axis becomes

$$x = \frac{1}{2}$$

Theorem 3 (Normalized Symmetry)

In normalized logarithmic coordinates the divisors of n are symmetric with respect to the line

$$x = \frac{1}{2}$$

6. Interpretation in the Divisibility Table

In the Parascan–Margoş divisibility table this symmetry manifests as:

- paired divisor positions
- mirrored divisor distributions
- structural balance between small and large divisors.

Each column of the table contains this internal symmetry.

7. Structural Consequences

The divisor symmetry produces several global properties.

1. Balanced divisor distribution

Every small divisor generates a large complementary divisor.

2. Square-root boundary

All divisors occur in pairs except possibly the central divisor when n is a perfect square.

3. Structural duality

The multiplicative structure of integers contains a natural dual transformation

$$d \rightarrow \frac{n}{d}$$

8. Conceptual Relation to the Critical Line

The symmetry axis

$$x = \frac{1}{2}$$

in normalized logarithmic space plays a structural role similar to the critical line

$$\Re(s) = \frac{1}{2}$$

in the theory of the Riemann zeta function.

Although the contexts are different, both structures exhibit:

- reflection symmetry
- central critical axes
- paired contributions.

This observation suggests a deeper structural relation between divisor geometry and analytic number theory.

9. Visualization in the Fractal Table

When the divisibility table is represented graphically:

- small divisors appear near the lower rows
- large divisors appear near the upper rows

The pairing produces mirrored patterns within each column.

These mirrored patterns are a fundamental component of the fractal structure described in later articles.

10. Conclusions

The Parascan–Margoș divisibility table reveals a fundamental symmetry in the distribution of divisors.

We have shown that:

- divisors occur in complementary pairs
- these pairs generate symmetry around \sqrt{n}
- in logarithmic coordinates the symmetry axis is $\frac{\log n}{2}$
- in normalized coordinates the symmetry axis becomes $1/2$.

This structural duality provides an important conceptual bridge toward the analytic structures appearing in the study of the Riemann zeta function.

In the next article we will analyze how exponentiation generates a **fractal structure** in the divisibility table.

Simetria divizorilor și dualitatea structurală în Tabelul Fractal al Divizibilității Parascan–Margoș

Gheorghe Parascan, Maria Margoș, Ally Constantin Margoș

Rezumat

În acest articol analizăm simetria structurală a divizorilor în Tabelul Fractal al Divizibilității Parascan–Margoș. Fiecare divizor al unui număr natural generează un divizor complementar, producând o structură duală care devine simetrică atunci când este reprezentată în coordonate logaritmice. Această simetrie conduce la o axă centrală naturală corespunzătoare valorii $1/2$ în spațiul logaritm normalizat. Rezultatul oferă o interpretare structurală care prezintă paralele conceptuale cu linia critică din teoria funcției zeta a lui Riemann.

1. Introducere

Relațiile de divizibilitate dintre numerele naturale prezintă o proprietate structurală fundamentală: fiecare divizor al unui număr are un divizor complementar. Această dualitate este vizibilă în tabelul de divizibilitate și generează o formă de simetrie care devine deosebit de clară atunci când numerele sunt reprezentate pe o scară logaritmică.

Înțelegerea acestei simetrii este importantă din mai multe motive:

- dezvăluie structuri geometrice ascunse în mulțimea numerelor naturale
- explică comportamentul de împerechere al divizorilor
- creează o punte conceptuală între structurile aritmetice discrete și formulările analitice, cum ar fi funcția zeta a lui Riemann.

2. Divizorii complementari

Fie $n \in \mathbb{N}$ și fie d un divizor al lui n .

Atunci există un alt divizor

$$d' = \frac{n}{d}$$

astfel încât

$$d \cdot d' = n$$

Prin urmare, fiecare divizor apare într-o pereche.

Exemplu

Pentru $n = 12$:

divizori:

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

perechi:

$$(1, 12)$$

$$(2, 6)$$

$$(3, 4)$$

Teorema 1 (Împerecherea divizorilor)

Pentru fiecare divizor d al lui n , există un divizor complementar

$$d' = \frac{n}{d}$$

iar perechea satisface relația

$$dd' = n$$

Demonstrație

Dacă $d \mid n$, atunci există un număr întreg k astfel încât

$$n = dk$$

Prin urmare

$$k = \frac{n}{d}$$

care este de asemenea divizor al lui n .

Astfel fiecare divizor are un divizor complementar.

3. Simetria divizorilor

Perechile de divizori generează o structură simetrică în jurul rădăcinii pătrate a lui n .
Dacă

$$d \leq \sqrt{n}$$

atunci

$$\frac{n}{d} \geq \sqrt{n}$$

Prin urmare lista divizorilor este simetrică în jurul valorii
 \sqrt{n}

Exemplu

Pentru $n = 36$:
divizori:

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

punct central:

$$\sqrt{36} = 6$$

Divizorii apar simetric în jurul acestei valori.

4. Reprezentarea logaritmică

Simetria devine mai clară atunci când este exprimată în coordonate logaritmice.
Fie

$$d' = \frac{n}{d}$$

Luând logaritmi:

$$\log d + \log d' = \log n$$

Astfel

$$\log d' = \log n - \log d$$

Aceasta înseamnă că cei doi divizori sunt simetrici în jurul punctului

$$\frac{\log n}{2}$$

Teorema 2 (Simetria logaritmică)

În coordonate logaritmice, divizorii lui n sunt simetrici în jurul punctului

$$\frac{\log n}{2}$$

Demonstrație

Din relația

$$\log d + \log (n/d) = \log n$$

punctul median dintre cele două valori este

$$\frac{\log d + \log (n/d)}{2} = \frac{\log n}{2}$$

Prin urmare perechea este simetrică în jurul acestei valori.

5. Coordonate normalizate

Definim coordonata normalizată

$$x = \frac{\log d}{\log n}$$

Atunci divizorul complementar are coordonata

$$1 - x$$

Axa de simetrie devine

$$x = \frac{1}{2}$$

Teorema 3 (Simetria normalizată)

În coordonate logaritmice normalizate, divizorii lui n sunt simetrici față de dreapta

$$x = \frac{1}{2}$$

6. Interpretarea în Tabelul Divizibilității

În Tabelul Parascan–Margoș al divizibilității această simetrie se manifestă prin:

- poziții pereche ale divizorilor
- distribuții oglindite ale divizorilor
- echilibru structural între divizorii mici și cei mari.

Fiecare coloană a tabelului conține această simetrie internă.

7. Consecințe structurale

Simetria divizorilor produce mai multe proprietăți globale.

1. Distribuție echilibrată a divizorilor

Fiecare divizor mic generează un divizor mare complementar.

2. Frontiera rădăcinii pătrate

Toți divizorii apar în perechi, cu excepția posibilă a divizorului central atunci când n este un pătrat perfect.

3. Dualitate structurală

Structura multiplicativă a numerelor întregi conține o transformare duală naturală

$$d \rightarrow \frac{n}{d}$$

8. Relația conceptuală cu linia critică

Axa de simetrie

$$x = \frac{1}{2}$$

în spațiul logaritmic normalizat joacă un rol structural similar cu linia critică

$$\Re(s) = \frac{1}{2}$$

din teoria funcției zeta a lui Riemann.

Deși contexte diferite, ambele structuri prezintă:

- simetrie de reflexie
- axe centrale critice
- contribuții pereche.

Această observație sugerează o relație structurală mai profundă între geometria divizorilor și teoria analitică a numerelor.

9. Vizualizarea în Tabelul Fractal

Atunci când tabelul de divizibilitate este reprezentat grafic:

- divizorii mici apar în partea inferioară
- divizorii mari apar în partea superioară.

Împerecherea produce modele oglindite în interiorul fiecărei coloane.

Aceste modele oglindite sunt o componentă fundamentală a structurii fractale analizate în articolele următoare.

10. Concluzii

Tabelul Parascan–Margoș al divizibilității dezvăluie o simetrie fundamentală în distribuția divizorilor.

Am arătat că:

- divizorii apar în perechi complementare
- aceste perechi generează simetrie în jurul lui \sqrt{n}
- în coordonate logaritmice axa de simetrie este $\frac{\log n}{2}$
- în coordonate normalizate axa devine $1/2$.

Această dualitate structurală oferă o punte conceptuală importantă către structurile analitice care apar în studiul funcției zeta a lui Riemann.

În articolul următor vom analiza modul în care ridicarea numerelor la puteri generează o **structură fractală în tabelul divizibilității**.