

Foundations of the Parascan–Margoş Fractal Divisibility Table

Gheorghe Parascan, Maria Margos, Ally Constantin Margos

gheorgheparascan@gmail.com

Abstract

In this article we introduce the Parascan–Margoş Fractal Divisibility Table, a discrete representation of the complete network of divisibility relations among natural numbers. The table provides a structural visualization of factors, prime numbers, and composite numbers, revealing symmetries, fractal patterns, and operatorial relationships. We show that this structure contains the complete information about the factorization of natural numbers and allows conceptual connections with the Riemann zeta function and the Euler product.

1. Introduction

The distribution of prime numbers is one of the central problems in number theory. Classical approaches rely primarily on complex analysis, especially on the study of the Riemann zeta function

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

and on the Euler product representation

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

These formulations provide global information about the distribution of primes but do not directly describe the discrete structure of divisibility among natural numbers.

The fractal divisibility table offers a different perspective: all relationships between natural numbers are organized into a discrete matrix that reflects the fundamental arithmetic structure.

This representation allows:

- direct identification of prime numbers
- analysis of divisor distributions
- detection of structural symmetries
- construction of arithmetic operators.

2. The Divisibility Relation

Let $a, b \in \mathbb{N}$.

We say that a divides b if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that

$$b = ak$$

and we denote this relation by

$$a \mid b$$

The divisibility relation is:

- reflexive

- transitive
- antisymmetric.

Therefore it defines a **partial order** on the set of natural numbers.

3. Definition of the Divisibility Table

We define the indicator function

$$D(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \mid j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The infinite matrix

$$D = \{D(i, j)\}_{i, j \geq 1}$$

represents the **complete divisibility structure of the natural numbers**.

4. Interpretation of Columns

Column j contains all divisors of j :

$$\{i: i \mid j\}$$

Example:

j	divisors
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6

5. The Divisor Counting Function

We define

$$d(n) = \sum_{i=1}^n D(i, n)$$

which represents the number of divisors of n .

Example

n	d(n)
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4

6. Detection of Prime Numbers

A prime number p is characterized by the condition

$$d(p) = 2$$

meaning it has exactly two divisors:

$$1, p$$

Theorem 1

A natural number $n > 1$ is prime if and only if column n of the divisibility table contains exactly two entries equal to 1.

Proof

If n is prime, its only divisors are

$$1, n$$

so

$$d(n) = 2$$

Conversely, if $d(n) = 2$, the only divisors are 1 and n , hence n is prime.

7. Factorization of Natural Numbers

The structure of column n contains complete information about the factorization of n .

If

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

then

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

Theorem 2

The divisibility table contains complete information about the factorization of all natural numbers.

Justification

Each column lists exactly the divisors of n .

From the structure of these divisors the prime factorization can be reconstructed.

8. Geometric Structure of the Table

The matrix exhibits several structural patterns.

Diagonal patterns of multiples

For example, multiples of 2:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

multiples of 3:

$$3, 6, 9, 12, \dots$$

These form **periodic diagonal bands** across the table.

9. Observation on the Fractal Structure

Each column reproduces the same multiplicative structure at a different scale.

Example:

divisors of 12

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

contain the structures of the divisors of

- 2
- 3

- 4
- 6

This phenomenon produces **self-similarity** in the table.

10. Connection with Multiplicative Structure

Multiplicative arithmetic functions arise naturally in this representation.

Examples include:

- the Möbius function

$$\mu(n)$$

- the divisor function

$$d(n)$$

These can be interpreted as operators acting on the divisibility table.

11. Conceptual Connection with the Euler Product

The Dirichlet series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

reflects the same multiplicative structure encoded in the divisibility table.

The Euler product emerges from the independence of prime factors.

12. Methodological Remarks

The fractal divisibility table provides a structural viewpoint in number theory:

1. direct analysis of divisibility
2. identification of structural patterns
3. construction of arithmetic operators.

13. Conclusions

We introduced the fundamental structure of the Parascan–Margoş Fractal Divisibility Table. This table represents the complete divisibility network of the natural numbers and contains the full information about:

- divisors
- factorization
- prime numbers
- multiplicative structure.

In subsequent articles we will analyze:

- divisor symmetry
- fractal structures generated by exponentiation
- arithmetic operators
- connections with the Riemann zeta function.

References

- Hardy, G. H.; Wright, E. M. — *An Introduction to the Theory of Numbers*
 Apostol, T. — *Introduction to Analytic Number Theory*
 Edwards, H. — *Riemann's Zeta Function*

Fundamentele tabelului de divizibilitate fractală Parascan-Margoș

Gheorghe Parascan, Maria Margoș, Ally Constantin Margoș

Abstract

În acest articol introducem Tabelul Fractal Parascan–Margoș al divizibilității, o reprezentare discretă completă a relațiilor de divizibilitate dintre numerele naturale. Tabelul oferă o vizualizare structurală a factorilor, numerelor prime și compuse, evidențiind simetrii, modele fractale și relații operatoriale. Se arată că această structură conține informația completă despre factorizarea numerelor naturale și permite formularea unor conexiuni conceptuale cu funcția zeta a lui Riemann și produsul Euler.

1. Introducere

Distribuția numerelor prime reprezintă una dintre cele mai profunde probleme ale teoriei numerelor. Metodele clasice se bazează în principal pe analiza complexă, în special pe studiul funcției zeta a lui Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

și pe produsul Euler:

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

Aceste formulări oferă informații globale asupra distribuției primelor, dar nu descriu direct structura discretă a divizibilității.

Tabelul fractal al divizibilității oferă o abordare diferită: toate relațiile dintre numerele naturale sunt organizate într-o matrice discretă care reflectă structura aritmetică fundamentală.

Această reprezentare permite:

- identificarea directă a numerelor prime
- analiza distribuției divizorilor
- evidențierea simetriilor structurale
- construirea unor operatori aritmetici.

2. Relația de divizibilitate

Fie $a, b \in \mathbb{N}$.

Spunem că a divide b dacă există un $k \in \mathbb{N}$ astfel încât

$b = ak$ și notăm

$$a \mid b$$

Relația de divizibilitate este:

- reflexivă
- tranzitivă
- antisimetrică

Prin urmare formează o **ordine parțială** pe mulțimea numerelor naturale.

3. Definiția tabelului de divizibilitate

Definim funcția indicator:

$$D(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i \mid j \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Tabelul infinit

$$D = \{D(i, j)\}_{i, j \geq 1}$$

reprezintă **structura completă a divizibilității numerelor naturale.**

4. Interpretarea coloanelor

Coloana j conține toți divizorii lui j .

$$\{i: i \mid j\}$$

Exemplu:

j	divizori
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6

5. Funcția numărului de divizori

Definim

$$d(n) = \sum_{i=1}^n D(i, n)$$

care reprezintă numărul divizorilor lui n .

Exemplu

n	d(n)
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4

6. Detectarea numerelor prime

Un număr prim p este caracterizat prin:

$$d(p) = 2$$

adică are exact doi divizori:

1, p **Teorema 1**

Un număr natural $n > 1$ este prim dacă și numai dacă coloana n din tabelul de divizibilitate conține exact două valori egale cu 1.

Demonstrație

Dacă n este prim:
divizorii sunt doar

$$1, n$$

deci

$$d(n) = 2$$

Reciproc, dacă $d(n) = 2$ atunci singurii divizori sunt 1 și n , deci n este prim.

7. Factorizarea numerelor

Structura coloanei n conține informația completă despre factorizare.

Dacă

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

atunci

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

Teorema 2

Tabelul divizibilității conține informația completă despre factorizarea tuturor numerelor naturale.

Justificare

Fiecare coloană enumeră exact divizorii lui n .

Din structura acestor divizori se poate reconstrui factorizarea primă.

8. Structura geometrică a tabelului

Matricea prezintă mai multe tipare:

diagonale de multipli

De exemplu pentru 2:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

pentru 3:

$$3, 6, 9, 12, \dots$$

Acestea formează **benzi diagonale periodice**.

9. Observație asupra structurii fractale

Fiecare coloană reproduce aceeași structură multiplicativă la scară diferită.

De exemplu:

divizorii lui 12:

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

conțin structura divizorilor lui

- 2
- 3
- 4
- 6

Acest fenomen produce **autosimilaritate** în tabel.

10. Conexiunea cu structura multiplicativă

Funcțiile multiplicative apar natural în această reprezentare.

Exemplu:

funcția Möbius

$$\mu(n)$$

și funcția divisorilor

$$d(n)$$

pot fi interpretate ca operatori pe tabelul de divizibilitate.

11. Legătura conceptuală cu produsul Euler

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

reflectă exact aceeași structură multiplicativă prezentă în tabel.

De fapt:

produsul Euler apare din independența factorilor primi.

12. Observații metodologice

Tabelul fractal oferă o perspectivă diferită asupra teoriei numerelor:

1. analiza directă a divizibilității
2. identificarea modelelor structurale
3. posibilitatea construirii unor operatori aritmetici.

13. Concluzii

Am introdus structura fundamentală a Tabelului Fractal Parascan–Margoș. Aceasta reprezintă rețeaua completă a divizibilității numerelor naturale și conține informația integrală despre:

- divizori
- factorizare
- numere prime
- structura multiplicativă.

În articolele următoare vom analiza:

- simetria divizorilor
- structura fractală generată de puteri
- operatorii aritmetici
- conexiunile cu funcția zeta.