

The Geometry of Truncation: From the Zeta Series to the Euler Product in the Parascan– Margoş Divisibility Table

Gheorghe Parascan, Maria Margoş, Ally Constantin Margoş
gheorgheparascan@gmail.com

Abstract

In classical analytic number theory, the Riemann zeta function is expressed through two equivalent representations: a Dirichlet series over the natural numbers and an Euler product over the prime numbers. While these formulas are analytically equivalent, their geometric interpretation is rarely explored.

In this paper we introduce a structural interpretation based on the **Parascan–Margoş Fractal Table of Divisibility**, a discrete geometric lattice that represents all natural numbers together with their divisibility relations.

We show that the complete table corresponds naturally to the Dirichlet series representation of the zeta function, while a structural truncation of the table produces a configuration analogous to the Euler product. The interaction between the horizontal structure generated by primes and the vertical structure generated by the universal divisor 1 leads to a deformation of the lattice that can be interpreted as the geometric origin of the oscillatory behavior of the zeta function.

This perspective suggests that certain analytic phenomena associated with the Riemann zeta function may arise from the discrete geometry of divisibility.

1. Introduction

The Riemann zeta function occupies a central position in number theory. Defined initially for complex numbers with real part greater than one,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

it admits an equivalent representation as an infinite product over prime numbers,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

This identity, known as the Euler product, expresses the fundamental theorem of arithmetic within the framework of analytic functions.

Traditionally, these two formulas are understood purely in analytic terms. The Dirichlet series reflects contributions from all natural numbers, while the Euler product isolates the role of primes as multiplicative generators.

In this paper we propose a geometric interpretation of this duality based on the **Parascan–Margoş divisibility table**, a discrete structure that visualizes the relationships between numbers and their divisors.

Our central observation is that the two representations of the zeta function correspond naturally to two structural configurations of this table:

- the **complete table**, representing all natural numbers, corresponds to the Dirichlet series;
- a **truncated table**, retaining only prime-generated structures, corresponds to the Euler product.

The interaction between these two configurations produces structural tensions within the lattice that may provide a geometric interpretation of the oscillatory behavior associated with the zeta function.

2. The Parascan–Margoş Divisibility Table

We briefly describe the construction of the table.

2.1 Geometric construction

Let \mathbb{N} denote the set of natural numbers.

The first row of the table consists of the sequence

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Each subsequent row is obtained by shifting the natural number sequence one position to the right relative to the previous row.

Thus the table has the form

row 1:

1 2 3 4 5 6 7 8 ...

row 2:

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

row 3:

0 0 1 2 3 4 5 ...

and so on.

This construction generates a triangular lattice in which each natural number appears along diagonals.

2.2 Algebraic interpretation

Alternatively, the table may be interpreted in terms of divisibility.

For each number n , one marks the positions corresponding to its divisors.

The resulting pattern reveals a network of diagonal structures whose intersections correspond to composite numbers.

Prime numbers appear as nodes with minimal divisor intersections.

3. The Complete Table and the Zeta Series

The Dirichlet series representation of the zeta function sums contributions from all natural numbers:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Within the divisibility table, this corresponds to considering the entire lattice without restriction.

Each natural number contributes a structural element, and the table represents the full arithmetic universe of divisibility relations.

In this sense the complete table can be interpreted as a discrete geometric analogue of the Dirichlet series.

4. Structural Truncation and the Euler Product

Consider now a transformation of the table in which composite-generated structures are removed, leaving only those generated by prime numbers.

In this truncated configuration, prime numbers occupy the generating positions of the lattice.

This corresponds naturally to the Euler product

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Each factor of the product represents the infinite geometric progression generated by a prime number.

From the perspective of the divisibility table, the Euler product therefore corresponds to a **prime-generated reconstruction of the full lattice**.

5. Horizontal and Vertical Structures

The truncated table reveals two fundamental structural directions.

Horizontal direction

The horizontal axis contains the compressed sequence of prime numbers, acting as generators of the lattice.

Vertical direction

The vertical column corresponding to the divisor 1 appears for every natural number and therefore forms a universal structural anchor.

These two structures impose competing geometric constraints on the lattice.

6. Emergence of a Structural Wave

The horizontal compression of primes and the vertical stabilization imposed by the divisor 1 cannot be simultaneously satisfied within a perfectly linear configuration.

As a consequence, the lattice develops a periodic deformation.

We interpret this deformation as a **discrete analogue of the oscillatory behavior associated with the zeta function**.

In other words, the so-called "zeta wave" may reflect an intrinsic property of the geometry of the divisibility lattice.

7. Relation to the Critical Line

The symmetry of divisors plays an important role in this interpretation.

For every divisor $d \mid n$, there exists a complementary divisor n/d .

This duality produces a natural symmetry centered around

$$\sqrt{n}.$$

In analytic number theory, a similar symmetry appears in the functional equation of the zeta function and in the special role of the critical line

$$\Re(s) = \frac{1}{2}.$$

From the perspective of the divisibility lattice, this line may correspond to a structural equilibrium between the horizontal and vertical constraints of the truncated table.

8. Conclusion

We have proposed a geometric interpretation of the dual representations of the Riemann zeta function using the Parascan–Margoş divisibility table.

In this interpretation:

- the complete table corresponds to the Dirichlet series representation;
- the truncated table corresponds to the Euler product;
- the interaction between horizontal prime generators and the vertical divisor structure produces a deformation of the lattice that may be interpreted as the origin of the zeta wave.

While this perspective does not replace classical analytic methods, it suggests that certain analytic phenomena may have underlying discrete geometric origins.

Further work is required to formalize these connections and to explore their implications for the study of the Riemann zeta function and the distribution of prime numbers.

Geometria Trunchierii:

De la Seria Zeta la Produsul Euler în Tabelul de Divizibilitate Parascan–Margoş

Gheorghe Parascan, Maria Margoş, Ally Constantin Margoş

Rezumat

În teoria analitică clasică a numerelor, funcția zeta a lui Riemann este exprimată prin două reprezentări echivalente: o serie Dirichlet peste numerele naturale și un produs Euler peste numerele prime. Deși aceste formule sunt echivalente analitic, interpretarea lor geometrică este rareori explorată.

În acest articol introducem o interpretare structurală bazată pe **Tabelul Fractal Parascan–Margoş al divizibilității**, o rețea geometrică discretă care reprezintă toate numerele naturale împreună cu relațiile lor de divizibilitate.

Arătăm că tabelul complet corespunde în mod natural reprezentării funcției zeta sub forma seriei Dirichlet, în timp ce o trunchiere structurală a tabelului produce o configurație analogă cu produsul Euler. Interacțiunea dintre structura orizontală generată de numerele prime și structura verticală generată de divizorul universal 1 conduce la o deformare a rețelei care poate fi interpretată ca originea geometrică a comportamentului oscilatoriu al funcției zeta.

Această perspectivă sugerează că anumite fenomene analitice asociate funcției zeta a lui Riemann pot proveni din geometria discretă a divizibilității.

1. Introducere

Funcția zeta a lui Riemann ocupă o poziție centrală în teoria numerelor. Definită inițial pentru numere complexe cu partea reală mai mare decât unu,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

ea admite o reprezentare echivalentă sub forma unui produs infinit peste numerele prime,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Această identitate, cunoscută sub numele de produsul Euler, exprimă teorema fundamentală a aritmeticii în cadrul funcțiilor analitice.

În mod tradițional, aceste două formule sunt înțelese exclusiv în termeni analitici. Seria Dirichlet reflectă contribuțiile tuturor numerelor naturale, în timp ce produsul Euler izolează rolul numerelor prime ca generatori multiplicativi.

În acest articol propunem o interpretare geometrică a acestei dualități bazată pe **Tabelul Parascan–Margoș al divizibilității**, o structură discretă care permite vizualizarea relațiilor dintre numere și divizorii lor.

Observația centrală este că cele două reprezentări ale funcției zeta corespund în mod natural la două configurații structurale ale acestui tabel:

- **tabelul complet**, care reprezintă toate numerele naturale și corespunde seriei Dirichlet;
- **tabelul trunchiat**, care păstrează doar structurile generate de numerele prime și corespunde produsului Euler.

Interacțiunea dintre aceste două configurații produce tensiuni structurale în rețea care pot oferi o interpretare geometrică a comportamentului oscilatoriu asociat funcției zeta.

2. Tabelul Parascan–Margoș al divizibilității

Descriem pe scurt construcția tabelului.

2.1 Construcția geometrică

Fie \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale.

Primul rând al tabelului este format din șirul

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Fiecare rând următor este obținut prin deplasarea șirului numerelor naturale cu o poziție spre dreapta față de rândul precedent.

Astfel, tabelul are forma

rândul 1:

1 2 3 4 5 6 7 8 ...

rândul 2:

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

rândul 3:

0 0 1 2 3 4 5 ...

și așa mai departe.

Această construcție generează o rețea triunghiulară în care fiecare număr natural apare de-a lungul unor diagonale.

2.2 Interpretarea algebrică

Alternativ, tabelul poate fi interpretat în termeni de divizibilitate.

Pentru fiecare număr n se marchează pozițiile corespunzătoare divizorilor săi.

Modelul rezultat evidențiază o rețea de structuri diagonale ale căror intersecții corespund numerelor compuse.

Numerale prime apar ca noduri cu intersecții minime de divizori.

3. Tabelul complet și seria Zeta

Reprezentarea funcției zeta sub forma seriei Dirichlet însumează contribuțiile tuturor numerelor naturale:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

În cadrul tabelului de divizibilitate, aceasta corespunde considerării întregii rețele fără restricții.

Fiecare număr natural contribuie cu un element structural, iar tabelul reprezintă universul aritmetic complet al relațiilor de divizibilitate.

În acest sens, tabelul complet poate fi interpretat ca un analog geometric discret al seriei Dirichlet.

4. Trunchierea structurală și Produsul Euler

Considerăm acum o transformare a tabelului în care structurile generate de numerele compuse sunt eliminate, rămânând doar cele generate de numerele prime.

În această configurație trunchiată, numerele prime ocupă pozițiile generatoare ale rețelei.

Aceasta corespunde în mod natural produsului Euler

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Fiecare factor al produsului reprezintă progresia geometrică infinită generată de un număr prim.

Din perspectiva tabelului de divizibilitate, produsul Euler corespunde astfel unei **reconstrucții a rețelei pornind de la generatorii primi.**

5. Structuri orizontale și verticale

Tabelul trunchiat evidențiază două direcții structurale fundamentale.

Dirrecția orizontală

Axa orizontală conține secvența comprimată a numerelor prime, care acționează ca generatori ai rețelei.

Dirrecția verticală

Coloana verticală corespunzătoare divizorului 1 apare pentru fiecare număr natural și formează astfel o ancoră structurală universală.

Aceste două structuri impun constrângeri geometrice concurente asupra rețelei.

6. Apariția unei unde structurale

Compresia orizontală a numerelor prime și stabilizarea verticală impusă de divizorul 1 nu pot fi satisfăcute simultan într-o configurație perfect liniară.

Ca urmare, rețeaua dezvoltă o deformare periodică.

Interpretăm această deformare ca un **analog discret al comportamentului oscilatoriu asociat funcției zeta**.

Cu alte cuvinte, „unda Zeta” poate reflecta o proprietate intrinsecă a geometriei rețelei de divizibilitate.

7. Relația cu linia critică

Simetria divizorilor joacă un rol important în această interpretare.

Pentru fiecare divizor d | n există un divizor complementar n/d .

Această dualitate produce o simetrie naturală în jurul valorii

$$\sqrt{n}.$$

În teoria analitică a numerelor, o simetrie similară apare în ecuația funcțională a funcției zeta și în rolul special al liniei critice

$$\Re(s) = \frac{1}{2}.$$

Din perspectiva rețelei de divizibilitate, această linie poate corespunde unei stări de echilibru structural între constrângerile orizontale și cele verticale ale tabelului trunchiat.

8. Concluzie

Am propus o interpretare geometrică a reprezentărilor duale ale funcției zeta a lui Riemann folosind Tabelul Parascan–Margoș al divizibilității.

În această interpretare:

- tabelul complet corespunde seriei Dirichlet;
- tabelul trunchiat corespunde produsului Euler;
- interacțiunea dintre generatorii primi orizontali și structura verticală a divizorilor produce o deformare a rețelei care poate fi interpretată ca originea undei Zeta.

Deși această perspectivă nu înlocuiește metodele analitice clasice, ea sugerează că anumite fenomene analitice ar putea avea origini geometrice discrete.

Sunt necesare cercetări suplimentare pentru a formaliza aceste conexiuni și pentru a explora implicațiile lor asupra studiului funcției zeta a lui Riemann și al distribuției numerelor prime.
