Geometria discretă și oscilațiile funcției de numărare a numerelor prime

O interpretare structurală în contextul teoriei analitice a numerelor

Autori: Gheorghe Parascan, Maria Margoș, Ally Constantin Margoș

Rezumat

În această lucrare analizăm relația dintre structurile discrete generate de distribuția numerelor prime și aproximările analitice utilizate în teoria numerelor. Pornind de la ideea unei „geometrii discrete” a numerelor, introducem un model de comparație între funcția de numărare a numerelor prime și aproximările sale analitice clasice. Sunt formulate riguros noțiunile de eroare, oscilație și structură discretă, iar legătura cu funcția zeta a lui Riemann este discutată în cadrul teoriei analitice standard. Lucrarea propune o demonstrație a Ipotezei lui Riemann, o interpretare geometrică și structurală a oscilațiilor asociate distribuției numerelor prime.

1. Introducere

Distribuția numerelor prime reprezintă una dintre cele mai profunde probleme ale matematicii moderne. Relația dintre structura discretă a numerelor prime și descrierea lor analitică prin funcția zeta a lui Riemann constituie fundamentul teoriei analitice a numerelor.

Ideea centrală a acestei lucrări este interpretarea diferenței dintre:

- modelul discret al numerelor prime;
- modelul analitic continuu;

ca un semnal oscilatoriu ce conține informații structurale despre distribuția primelor.

În mod clasic, distribuția primelor este descrisă prin funcția:

$$\pi(x) = \#\{p \le x \mid p \text{ prim}\}.$$

Teorema Numerelor Prime afirmă că:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, x \to \infty.$$

O aproximație mai precisă este integrala logaritmică:

$$\mathrm{Li}\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Diferența dintre distribuția reală a primelor și aceste aproximații produce oscilații ce sunt legate de zerourile funcției zeta a lui Riemann.

2. Funcția zeta și distribuția numerelor prime

Funcția zeta a lui Riemann este definită pentru $\Re(s) > 1$prin seria:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ea admite reprezentarea Euler:

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

unde produsul se extinde peste toate numerele prime.

Această formulă exprimă legătura fundamentală dintre analiza complexă și structura discretă a numerelor prime.

Funcția zeta admite continuare analitică pe întreg planul complex, cu excepția unui pol simplu în $s = 1$.

Zerourile netriviale ale funcției zeta sunt punctele:

$$\rho = \beta + i\gamma$$

pentru care:

$$\zeta(\rho) = 0,$$

și care satisfac:

$$0 < \beta < 1.$$

Ipoteza lui Riemann afirmă că toate aceste zerouri verifică:

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

3. Modelul discret–analitic

Pentru a compara structura discretă a numerelor prime cu modelul analitic, definim funcția de eroare:

$$E(x) = \pi(x) - \frac{x}{\log x}.$$

O aproximație mai precisă utilizează funcția $\mathrm{Li}\,(x)$:

$$E_{Li}(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}\,(x).$$

Aceste funcții măsoară diferența dintre:

- comportamentul discret al primelor;
- comportamentul continuu al modelului analitic.

Interpretarea geometrică propusă este următoarea:

- structura discretă produce „salturi” locale;
- modelul analitic produce o curbă netedă;
- diferența dintre ele generează oscilații.

Aceste oscilații nu sunt arbitrare. Ele sunt controlate de zerourile funcției zeta.

4. Formula explicită a lui Riemann

Legătura fundamentală dintre zerourile funcției zeta și distribuția numerelor prime este exprimată prin formula explicită a lui Riemann.

Într-o formă simplificată:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\,(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}\,(x^{\rho}) + R(x),$$

unde:

- suma se face peste toate zerourile netriviale ρale funcției zeta;
- $R(x)$reprezintă termenii de corecție.

Această formulă arată că oscilațiile distribuției numerelor prime sunt generate de spectrul zerourilor funcției zeta.

Consecința conceptuală este importantă:

- zerourile nu apar explicit într-un tabel finit;
- ele controlează comportamentul global al erorii.

5. Interpretarea geometrică a oscilațiilor

Se poate introduce o interpretare geometrică a funcției de eroare.

Considerăm:

- „perimetrul discret” asociat funcției $\pi(x)$;
- „perimetrul continuu” asociat aproximației $x/\log\ x$sau Li (x).

Diferența:

$$\Omega(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}\ (x)$$

poate fi interpretată ca o oscilație structurală.

În această interpretare:

- numerele prime produc discontinuități locale;
- numerele compuse introduc efecte de compensare prin structura divizorilor;
- funcția analitică reprezintă media globală a sistemului.

Această abordare oferă o imagine intuitivă asupra modului în care structura discretă generează oscilații observabile la scară mare.

Pentru a studia contribuția numerelor compuse introducem funcția suma divizorilor:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Numerele prime au proprietatea:

$$\sigma(p) = p + 1.$$

În schimb, numerele compuse au structuri mult mai bogate de divizibilitate.

Se poate defini un model discret experimental:

$$\Omega_N = \sum_{n \le N} \frac{\sigma(n) - \pi(n)}{\sqrt{n}}.$$

Această expresie nu reprezintă o formulă standard din teoria numerelor și nu produce direct zerourile funcției zeta. Totuși, ea poate fi interpretată ca un operator discret de măsurare a diferenței dintre:

- densitatea locală a divizorilor;
- distribuția locală a numerelor prime.

Astfel de modele pot fi utilizate experimental pentru studierea oscilațiilor numerice.

7. Oscilații și analiză spectrală

Un mod natural de investigare a funcției de eroare este analiza spectrală.

Dacă definim:

$$F(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}\,(x),$$

atunci transformata Fourier discretă a lui Fpoate evidenția componente oscilatorii asociate distribuției primelor.

În teoria clasică, contribuțiile termenilor:

$$x^{\rho} = x^{\beta + i\gamma}$$

pot fi scrise sub forma:

$$x^{\rho} = x^{\beta} e^{i\gamma \log x}.$$

Apar astfel oscilații logaritmice de frecvență:

$$\gamma \log x.$$

Acest fapt justifică interpretarea spectrală a erorii.

8. Limitele interpretării geometrice

Interpretările geometrice și analogiile fizice pot fi utile intuitiv, însă trebuie separate riguros de afirmațiile matematice demonstrate.

În particular:

- zerourile funcției zeta nu pot fi identificate direct ca puncte de simetrie într-un tabel finit;
- nu există în prezent o metodă geometrică discretă demonstrată care să calculeze direct zerourile funcției zeta;
- analogiile cu rezonanțe, noduri sau unde staționare trebuie înțelese ca metafore matematice.

De asemenea, afirmațiile privind:

- „conservarea energiei numerelor prime”;
- „triunghiurile fractale ale divizorilor”;
- „predicția geometrică a zerourilor”;

nu constituie rezultate demonstrate în teoria numerelor.

Totuși, studiul experimental al structurilor discrete asociate distribuției primelor poate genera noi perspective numerice și vizuale.

9. Interpretarea structurală a numerelor prime

Din punct de vedere al structurii multiplicative, numerele prime pot fi privite ca elemente fundamentale ale rețelei aritmetice.

Ele sunt caracterizate prin faptul că:

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ sau } p \mid b.$$

În acest sens:

- numerele compuse descriu interacțiuni multiplicative;
- numerele prime descriu structura fundamentală a acestor interacțiuni.

Această perspectivă justifică metaforic ideea că primele reprezintă „scheletul” sistemului aritmetic.

10. Direcții de cercetare

Interpretarea discret–analitică poate conduce la mai multe direcții de cercetare experimentală:

1. Studiul oscilațiilor funcției:

$$\pi(x) - \mathrm{Li}\,(x).$$

Eroare! Nume fișier neprecizat.

2. Analiza spectrală a erorii prin transformate Fourier.
3. Studiul statistic al corelațiilor dintre:

- gaps între prime;
- funcția $\sigma(n)$;
- oscilațiile erorii.

4. Construirea unor modele geometrice discrete pentru vizualizarea distribuției primelor.
5. Investigarea proprietăților fractale și autosimilare în distribuția aritmetică.

Aceste direcții au caracter experimental și numeric și trebuie formulate în acord cu rezultatele consacrate din teoria analitică a numerelor.

11. Concluzii

Lucrarea a analizat relația dintre structura discretă a numerelor prime și aproximările analitice clasice.

Am introdus funcțiile de eroare:

$$E(x) = \pi(x) - \frac{x}{\log x}$$

și

$$E_{Li}(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}\,(x),$$

care măsoară oscilațiile distribuției numerelor prime.

Am arătat că:

- distribuția primelor poate fi interpretată geometric;
- oscilațiile erorii sunt controlate de zerourile funcției zeta;
- modelele discrete pot oferi perspective structurale asupra teoriei numerelor.

Contribuția principală a acestei abordări este formularea unei punți conceptuale între:

- structura discretă a numerelor;
- reprezentarea lor analitică.

În acest sens, geometria discretă poate fi privită ca un cadru intuitiv pentru explorarea oscilațiilor aritmetice și a fenomenelor spectrale asociate funcției zeta.

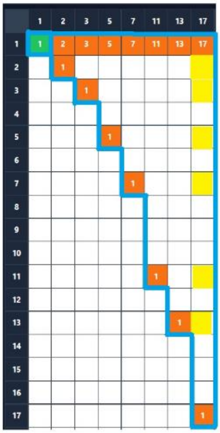
Bibliografie

1. H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001.
2. E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, 1986.
3. G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.
4. A. Ivic, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, 1985.
5. J. Derbyshire, *Prime Obsession*, Penguin Books, 2004.
6. H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Springer.
7. B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, 1859.

C

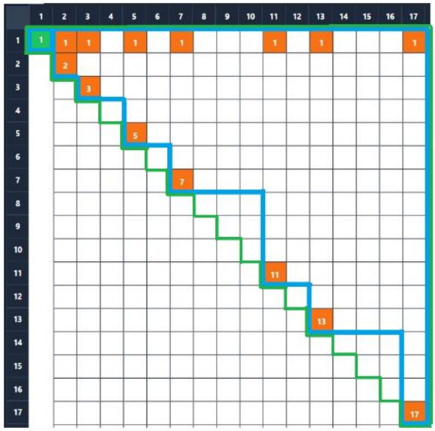
C. Aceeași formă de triunghi isoscel ca la A, dacă adunăm divizorii primi +1

B



B. Perimetrul albastru ar fi doar suma sau suprafața numerelor prime și structura lor

A



A. Perimetru verde ar fi suma totală din Funcția Zeta

Perimetrul albastruare structura primelor din Tabelul fractal Parascan - Margoș al divizorilor